**José Carlos da Silva Rangel de Almeida Marques**
Licenciatura em Matemática

# Relatório de Estágio

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientadora: Professora Doutora Helena Rocha, Professora Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Co-orientadora: Licenciada Rosário Lopes, Professora, Escola Secundária com 3.º ciclo do Ensino Básico António Gedeão

Júri:

| | |
|---|---|
| Presidente: | Professora Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos |
| Arguente: | Professor Doutor Filipe José Gonçalves Pereira Marques |
| Vogais: | Professor Doutor Filipe José Gonçalves Pereira Marques |
| | Professora Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha |
| | Licenciada Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes |

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

**Junho 2014**

# Relatório de Estágio

**Resumo**

Palavras Chave: Estágio pedagógico; Conexões Matemáticas; Derivadas; Geometria; Problemas; Dificuldades

A presente dissertação está dividida em duas partes: a primeira referente ao relatório de estágio a segunda ao trabalho de investigação na prática pedagógica.

O relatório de estágio encontra-se dividido em cinco secções: Introdução, Agrupamento de Escolas António Gedeão, A escola de estágio, Prática Pedagógica e Reflexão Crítica. Nesta parte caracterizou-se fisicamente o Agrupamento de escolas António Gedeão e os alunos, caracterizou-se o local e a turma de estágio, resumiu-se o trabalho desenvolvido pelo estagiário na escola de estágio e, por fim, foi feito uma reflexão crítica do trabalho.

O trabalho de investigação na prática pedagógica, a segunda parte deste trabalho, encontra-se dividido em 5 secções: Introdução, Revisão de literatura, Metodologia, Análise de dados e Conclusão.

Com este projeto pretendeu-se perceber como é que os alunos fazem conexões matemáticas. Com esse intuito analisou-se como é que quatro alunos, de uma turma do 12.º ano, resolviam dois problemas envolvendo conexões entre os temas da geometria e das derivadas. Analisou-se o método de resolução do problema, em que fase é que surgem as conexões na resolução dos problemas e as principais dificuldades sentidas pelos alunos.

Com este estudo, concluiu-se que os alunos que têm o conceito de derivada interiorizado conseguem fazer, com algum auxílio, a conexão dentro deste tema, porém todos os alunos sentiram dificuldades em fazer a conexão entre diversos temas. Todos os alunos resolvem os problemas passando por duas fases, a compreensão do problema e a elaboração e execução do plano de resolução do problema, sendo que as conexões surgiram sempre nesta segunda fase.

**Abstract**

Keyword: Teacher training; Mathematic connections; Derivatives; Geometry; Problems; Difficulties

The present dissertion is divided in two parts: the first one refers to the teacher training report and the second one refers to the educational practice investigation work.

The teacher training report is divided in five sections: Introduction, António Gedeão school grouping, The teacher training school, Pedagogical Practice and Critical Reflection. It was made a physical characterization of António Gedeão school grouping and of the students. Also, it was made a physical characterization of the António Gedeão school and an apresentation of the class student's that have been accompanied in the teacher training, and a report of work done. Finally, was done a critical reflection of the work developed.

The work of educational practice investigation work, the second part, is divided in five sections: Introduction, Literature review, Methodology, Analysis of dates and Conclusion.

The aim of this work is to understand how students do mathematic connections, and for that I analysed how four students, of a class of $12^{th}$ grade, solve two problems involving connections between geometry and derivatives. It was analyzed the method of problem solving, which are the phase where connections appears and corresponds to the major student's difficulties.

In this work, I have concluded that students with the concept of derivatives interiorized can do connections within a theme, with some help, but all students have difficulties doing connections between various themes. All students solve problems through two phases, the first comprising the problem comprehension and the second envolving the establishing and execution of the plan. It was observed that connections appears always in the second phase.

**Agradecimentos**

À professora Rosário Lopes, minha Orientadora Pedagógica, pelo apoio e disponibilidade que constantemente demonstrou, e pelo rigor e capacidade orientadora um muito obrigado. Aos professores doutores António Domingos e Helena Rocha, Orientadores Científicos, pela crítica e orientação dada ao longo do trabalho de investigação.
Aos professores doutores Filipe Marques e Maria Helena Santos pelos conselhos e comentários que me ajudaram a melhorar o meu desempenho.
Aos alunos anónimos que participaram em todo este trabalho.
Às pessoas que dispensaram o seu tempo a ler e a dar sugestões para a melhoria do presente trabalho, um muito obrigado.

# Conteúdo

Parte I

# Relatório de Estágio

# Conteúdo

# 1 Introdução

O presente relatório de estágio foi elaborado como trabalho final da cadeira Estágio Orientado, integrada no plano de estudos do Mestrado em Ensino da Matemática dos ensinos básico e secundário.

O estágio orientado decorreu na escola Secundária com 3º ciclo do Ensino Básico de António Gedeão, escola sede do Agrupamento de Escolas António Gedeão, situada no concelho de Almada. O estágio decorreu durante o ano letivo 2013/2014, sob a orientação da Professora Rosário Lopes e a supervisão dos responsáveis científicos da FCT-UNL, a Professora Doutora Maria Helena Santos e o Professor Doutor Filipe Marques. O trabalho de estágio desenvolveu-se numa turma do 12.º ano do curso Cientifico-Humanístico de Ciências e Tecnologias, na disciplina de Matemática A.

No presente relatório é feita uma caracterização da escola, da turma e do trabalho desenvolvido pelo estagiário ao longo dos três períodos do ano letivo 2013/2014.

# 2 Agrupamento de Escolas António Gedeão

## 2.1 Caracterização Física do Agrupamento de escolas António Gedeão

O Agrupamento de Escolas António Gedeão (AEAG) constituiu-se a 22 de Abril de 2013, reunindo seis escolas, com níveis de ensino repartidos entre o pré-escolar e o Secundário:

- Escola Básica 1.º ciclo e Jardim de Infância do Laranjeiro n.º 3 ;
- Escola Básica 1.º ciclo do Alfeite;
- Escola Básica 1.º ciclo da Cova da Piedade n.º 1;
- Escola Básica 1.º ciclo da Cova da Piedade n.º 2;
- Escola Básica 2.º e 3.º ciclo Comandante Conceição e Silva;
- Escola Secundária com 3.º ciclo do Ensino Básico de António Gedeão (sede do agrupamento).

Para além do ensino regular, o agrupamento apresenta também as seguintes ofertas formativas:

- Cursos de Educação e Formação:
  - Jardinagem e Espaços Verdes;
  - Assistente Administrativo;
  - Serviços domésticos/Apoio familiar e à comunidade.
- Cursos Profissionais:
  - Técnico da Apoio à Infância;
  - Técnico de Receção;
  - Animador Sócio-cultural.

Todas as escolas se situam no concelho de Almada, repartindo-se entre as freguesias União das Freguesias de Laranjeiro e Feijó (UFLF) e União das Freguesias de Almada, Cova da Piedade, Pragal e Cacilhas (UFACPPC), de acordo com a tabela seguinte:

| **Escolas** | **UFLF** | **UFACPPC** |
|---|---|---|
| E.B.1/J.I. Laranjeiro n.º 3 | x | |
| E.B. 1 do Alfeite | x | |
| E.B. 1 Cova da Piedade n.º 1 | | x |
| E.B. 1 Cova da Piedade n.º 2 | | x |
| E.B. 2,3 Comandante Conceição e Silva | | x |
| E.S. c/3.º ciclo António Gedeão | x | |

Tabela 2.1: Distribuição das escolas do AEAG pelas duas freguesias do concelho de Almada

As escolas do 1.º ciclo, inicialmente, pertenciam ao Agrupamento Vertical de Escolas Comandante Conceição e Silva, tendo integrado o Agrupamento de Escolas António Gedeão em Abril de 2013.

Apresenta-se, de seguida, uma breve caracterização física e histórica das escolas do Agrupamento. No entanto, será efetuada apenas uma breve referência histórica à E.S. c/3.º ciclo de António Gedeão, uma vez que esta escola, onde decorreu o estágio, será caracterizada mais aprofundadamente numa secção posterior.

### 2.1.1 Escola Básica 1.º ciclo e Jardim de Infância do Laranjeiro n.º 3

Figura 2.1: E.B. 1/J.I. do Laranjeiro n.º 3

A E.B. 1/J.I. Laranjeiro n.º 3 situa-se na União das Freguesias de Laranjeiro e Feijó, na Rua José Afonso. Esta escola foi inaugurada a 1 de Outubro de 1989 com a função de escola básica do 1.º ciclo e, mais tarde, a Janeiro de 1998, passou a incluir as funções de Jardim de Infância, funcionado, no entanto, como duas escolas independentes. Só em 2003, quando integrou o Agrupamento Vertical de Escolas Comandante Conceição e Silva é que estas duas escolas passaram a constituir uma só escola designada pelo presente nome.

A vista aérea da escola é apresentada na figura 2.2, onde se observa a distribuição do edifícios, dos recintos desportivos e das áreas não edificadas. Como se pode observar nesta figura, a escola é constituída por dois edifícios, onde funcionam o ensino pré-escolar e o ensino básico.


Figura 2.2: Vista aérea da E.B. 1/J.I. do Laranjeiro n.º 3.
Retirado de: https://maps.google.pt/

### 2.1.2 Escola Básica 1.º ciclo do Alfeite


Figura 2.3: Vista aérea da E.B. 1 do Alfeite.
Retirado de: https://maps.google.pt/

A E.B. 1 do Alfeite situa-se na União das Freguesias de Laranjeiro e Feijó, na Rua José Carlos de Melo, num terreno militar da Base Naval do Alfeite e foi inaugurada em 1957.

Na figura 2.3 está representado o espaço escolar (limitado a vermelho), constituído por edifícios, recintos desportivos e áreas não edificadas. A escola é constituída por quatro edifícios, dois deles onde funcionam as aulas do ensino básico e nos outros dois decorrem as atividades físico-motoras e de enriquecimento curricular, sendo também utilizados pelo Centro de Apoio Social do Alfeite.

### 2.1.3 Escola Básica 1.º ciclo Cova da Piedade n.º 1

A E.B. 1 Cova da Piedade n.º 1 situa-se na União das Freguesias de Almada, Cova da Piedade, Pragal e Cacilhas, na Avenida da Fundação. Inaugurada em 1948, esta escola era, inicialmente, apenas frequentada por raparigas.


Figura 2.4: Vista aérea da E.B. 1 Cova da Piedade n.º1.
Retirado de: https://maps.google.pt/

Na figura 2.4 o espaço escolar está limitado a vermelho e é possível observar três edifícios: o edifício principal, onde estão localizadas a maioria das salas de aula, e os outros dois edifícios, onde funciona uma sala de aula, mas também outros recursos, nomeadamente o refeitório e o A.T.L.

Figura 2.5: E.B. 1 Cova da Piedade n.º 1

### 2.1.4 Escola Básica 1.º ciclo Cova da Piedade n.º 2

A E.B. 1 Cova da Piedade n.º 2 situa-se na União das Freguesias de Almada, Cova da Piedade, Pragal e Cacilhas, na Rua Mazagão. Inaugurada em 1951, esta escola foi, em 2006, submetida a obras de remodelação e ampliação.


Figura 2.6: Vista aérea da E.B. 1 Cova da Piedade n.º 2.
Retirado de: https://maps.google.pt/

A figura 2.6 é uma imagem aérea do espaço escolar (limitado a vermelho), é constituído por dois edifícios, onde decorrem as aulas do ensino básico. Observam-se, também outros constituintes do espaço escolar, tais como os recintos desportivos e as áreas não edificadas.

Figura 2.7: E.B. 1 Cova da Piedade n.º 2

### 2.1.5 Escola Básica 2.º e 3.º ciclo Comandante Conceição e Silva

A E.B. 2, 3 Comandante Conceição e Silva está situada na União das Freguesias de Almada, Cova da Piedade, Pragal e Cacilhas, na Rua Comandante Eugénio Conceição Silva. A escola foi criada em 1973, contudo apenas em Outubro de 1975 começou a funcionar no presente local. Esta escola foi escola-sede do Agrupamento Vertical de escolas Comandante Conceição e Silva até 2013, altura em que integrou o Agrupamento de Escolas António Gedeão.


Figura 2.8: Vista aérea da E.B. 2,3 Comandante Conceição e Silva.
Retirado de: https://maps.google.pt/

Na figura 2.8 observa-se o espaço escolar, limitado a vermelho, que é constituído por dois pavilhões, onde funcionam as salas de aulas e outras estruturas inerentes à gestão e à vida escolar, e por dois campos de jogos e os balneários.

Figura 2.9: E.B. 2,3 Comandante Conceição e Silva

#### 2.1.6 Escola Secundária com 3.º ciclo do Ensino Básico de António Gedeão

A E.S. c/ 3.º ciclo de António Gedeão localiza-se na União das Freguesias de Laranjeiro e Feijó, na Alameda Guerra Junqueiro. A escola foi inaugurada em 1983, contudo apenas em 1984, começou a funcionar em pleno, com turmas do 7.º ao 9.º ano. No ano letivo 1988/1989, começou a funcionar o ensino secundário, com turmas do 10.º ao 12.º ano.

Figura 2.10: E.S. c/3 António Gedeão

### 2.2 Caracterização dos alunos do Agrupamento de Escolas António Gedeão

No início do ano letivo 2013/2014, o agrupamento tinha 2302 alunos inscritos, divididos por 99 turmas. Na tabela seguinte apresenta-se a distribuição do número de alunos e de turmas por ciclos de ensino.

| Níveis de ensino | Número de alunos | Número de turmas |
|---|---|---|
| **Pré-escolar** | 165 | 7 |
| **1.º Ciclo** | 832 | 36 |
| **2.º Ciclo** | 378 | 16 |
| **3.º Ciclo** | 546 | 23 |
| **Secundário** | 381 | 17 |
| **Total Agrupamento** | 2302 | 99 |

Tabela 2.2: Divisão de número de alunos e de turmas por ciclo de ensino

Observando a tabela 2.2, conclui-se que o ciclo de ensino com maior número de alunos e, consequentemente, de turmas é o 1.º Ciclo.

A única escola do agrupamento com ensino secundário é a Escola Secundário c/ 3.º ciclo do Ensino Básico de António Gedeão (sede do agrupamento), que se irá designar por ESAG, onde existem dezassete turmas do Ensino Secundário, divididas pelos Cursos Científico Humanístico Ciências e Tecnologias, Ciências Sócioeconómicas e Línguas e Humanidades e pelos Cursos Profissionais de Técnico de Apoio à Infância, Técnico de Receção e de Animador Sóciocultural. A partir da constituição do Agrupamento de Escolas António Gedeão as turmas do 3.º ciclo da Escola Básica Comandante Conceição e Silva passaram a funcionar na escola sede (ESAG). Desta forma a Escola Básica Comandante Conceição e Silva ficou dedicada em exclusivo ao 2.º ciclo.

O Ensino Pré-escolar está presente em duas escolas, na Escola Básica 1.º ciclo do Alfeite e Escola Básica 1.º ciclo e Jardim de Infância do Laranjeiro n.º 3, com 165 alunos distribuídos por sete turmas.

A média do número de alunos por turma situa-se nos vinte e quatro alunos, em cada nível de ensino. As turmas com menor número de alunos encontram-se no ensino Secundário.

# 3 A escola de estágio

## 3.1 Caracterização Física da Escola Secundária c/ 3.º ciclo do Ensino Básico de António Gedeão

A E.S. c/3 ciclo de António Gedeão situa-se na União das Freguesias de Laranjeiro e Feijó e é constituída por cinco pavilhões, um bloco pré-fabricado e um pavilhão desportivo (figura 3.1).


Figura 3.1: Vista aérea da E.S. c/3.º ciclo António Gedeão. O espaço escolar está limitado com uma linha a vermelho.
Retirado de: https://maps.google.pt/

Na vista aérea da figura 3.1 não é observável um campo de futebol sintético que substituiu o antigo campo de jogos. Este espaço embora gerido por entidade externa é utilizado pelos alunos para a prática desportiva. As restantes atividades letivas decorrem em diferentes espaços distribuídos por seis pavilhões:

- Pavilhão H - sem salas de aula, é o local onde funcionam os serviços administrativos, a biblioteca/centro de recursos, a reprografia, sala de professores, gabinete de primeiros socorros, gabinete dos diretores de turma, gabinete da chefe de assistentes operacionais/ ASE/ trabalho de professores, gabinete de fotografia/ projeto Eneas, sala da direção, sala de estudo, gabinete do CADE/ trabalho para professores e gabinete de prevenção da indisciplina;

- Pavilhão E - é constituído por salas de aulas, uma sala de Informática, uma sala de Ciências Naturais e Geologia e uma sala de Educação Visual, sala de EMRC, gabinete de apoio à matemática/educação para a saúde, laboratório de matemática e uma sala equipada com computadores;

– Pavilhão R - não tem salas de aula, neste pavilhão funcionam o refeitório, o bar e a sala de convívio dos alunos e do pessoal não docente;

– Pavilhão D - este edifício é constituído por salas de aula, os laboratórios de Física, de Biologia e de Química, os gabinetes de Psicologia e Orientação escolar e do Conselho Geral;

– Pavilhão L - pavilhão onde funcionam as salas de Teatro, Educação Tecnológica, Cerâmica, associação de estudantes, sala de convívio e jogos e uma papelaria;

– Pavilhão A - bloco pré-fabricado, onde funcionam salas de aulas e um gabinete de assistentes operacionais.

Todas as salas de aulas têm projetor e computador e algumas salas têm, também, quadro interativo. Existem duas salas de informática, com vários computadores para uso dos alunos e, para além desses dois espaços, os alunos podem utilizar computadores em duas salas de aula, na biblioteca e na sala de estudo.

O edifício com piores condições é o pavilhão A, pois é um pré-fabricado, que se encontra bastante degradado, uma vez que se trata de um pavilhão que se previa ser temporário e, no entanto, funciona há mais de 20 anos. As salas têm um isolamento térmico muito fraco, sendo, por isso, muito quentes no Verão e muito frias no Inverno. Existe, no entanto, uma preocupação constante da gestão na manutenção das condições mínimas de funcionamento deste pavilhão, essencial ao desenvolvimento da atividade letiva diária.

A movimentação entre a maioria dos pavilhões pode ser efetuada por um caminho com uma cobertura de proteção para a chuva.

## 3.2 A turma do 12.º X

### 3.2.1 Caracterização da turma

No ano letivo 2013/2014, a orientadora pedagógica, professora Rosário Lopes, lecionou três turmas, duas do 12.º ano de Matemática A e outra do curso CEF. O estagiário estava responsável por acompanhar uma das turmas do

12.º ano, a turma do 12.º X ou 12.º Y. Durante a primeira semana o professor estagiário acompanhou o trabalho desenvolvido nas duas turmas do 12º ano, tendo posteriormente optado por desenvolver o trabalho de estágio com a turma X. Esta escolha deveu-se, essencialmente, ao facto dos alunos serem mais participativos em aula e, pelas suas características, previa-se mais fácil a sua colaboração no desenvolvimento do trabalho de investigação.

A turma do 12.º X, era constituída por vinte e sete alunos dos quais vinte e um estavam inscritos na disciplina de Matemática A e seis eram alunos assistentes que acompanhavam as aulas regularmente. Dos vinte e um alunos inscritos, 12 eram do sexo masculino e apenas 9 do sexo feminino. As suas idades variavam entre entre os 16 e 18 anos, como se pode observar no gráfico da figura 3.2.

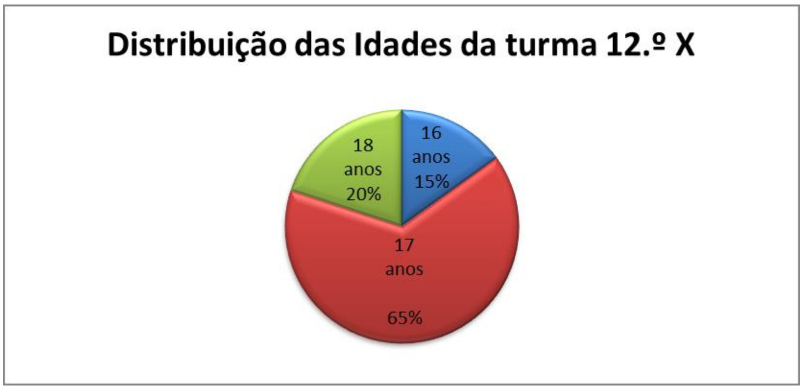



Figura 3.2: Distribuição das Idades dos alunos da turma 12.º X

Analisando a figura 3.2, observa-se que a maioria dos alunos tinham 16 ou 17 anos e apenas 6 alunos (20% do total de alunos da turma) tinham 18 anos. Deste facto pode-se inferir que os alunos da turma efetuaram um percurso escolar sem retenções.

Com o objetivo de conhecer melhor o percurso dos alunos, na disciplina de Matemática A, ao longo do ensino secundário, apresenta-se no gráfico da figura 3.3 a distribuição das classificações dos alunos nos 10.º e 11.º anos. Da análise e interpretação destes dados é possível concluir que a média dos alunos da turma à disciplina foi de 12,8 valores no 10.º ano e de 12 valores no 11.º ano. A oscilação na média destes dois anos de escolaridade deveu-se ao facto de no 11.º ano, três alunos terem classificação negativa e ao facto das classificações da turma não ultrapassarem os 15 valores, enquanto no

10.º ano as classificações situaram-se entre os 10 e os 16 valores, havendo, somente, um aluno com 10 valores, enquanto no 11.º ano quatro dos alunos apresentavam esta classificação.

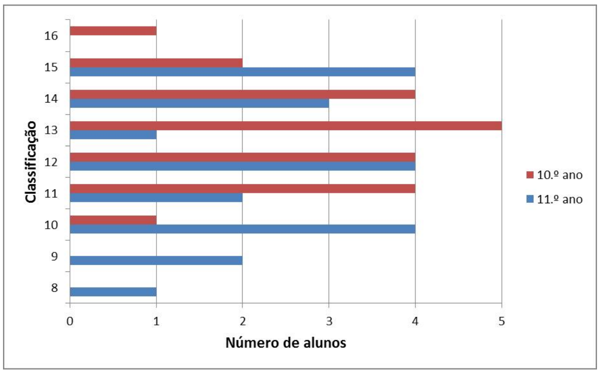



Figura 3.3: Classificações dos alunos da turma do 12.º X

A maioria dos alunos da turma vivia na União da Freguesias de Laranjeiro e Feijó (10 alunos), seis dos alunos viviam na freguesia de Corroios, e os restantes alunos distribuiam-se pelas freguesias da União das Freguesias de Charneca da Caparica e Sobreda e da União das Freguesias de Almada, Cova da Piedade, Pragal e Cacilhas.

A maioria destes alunos tinha como Encarregado de Educação a mãe (11 alunos), apenas dois alunos eram os próprios Encarregados de Educação, e os restantes tinham como Encarregado de Educação o pai. O seguinte gráfico apresenta a distribuição dos diferentes níveis de ensino dos Encarregados de Educação, tendo sido apenas considerados os Encarregados de dezassete alunos, já que dois alunos eram Encarregados de Educação de si próprios e sobre os restantes alunos não existia informação disponível.

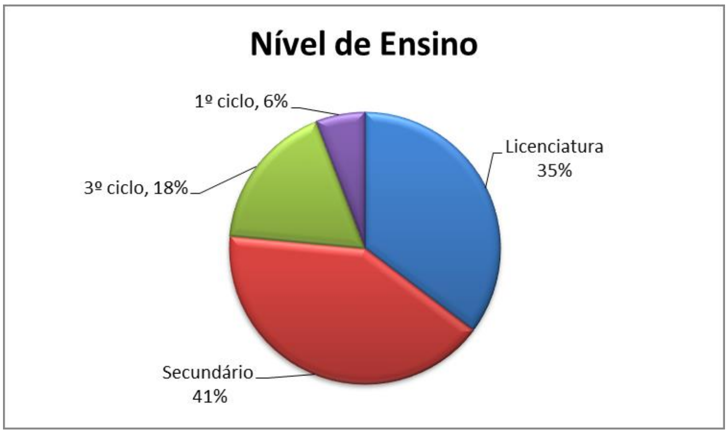



Figura 3.4: Distribuição dos níveis de ensino dos Encarregados de Educação

Analisando a figura 3.4 conclui-se que mais de metade dos Encarregados de Educação completaram pelo menos o ensino Secundário, 18% dos Encarregados de Educação tinham o 3.º ciclo completo, e apenas um Encarregado de Educação completou apenas o nível de Ensino mais baixo (1º ciclo).

A maioria dos alunos frequentaram a mesma turma desde o 7.º ano, sendo, por isso, uma turma bastante unida, constituindo um bom grupo de trabalho. No global, os alunos eram trabalhadores e responsáveis, contudo existiam alguns alunos que não eram pontuais e havia registos de algumas conversas paralelas durante as aulas.

A professora orientadora não conhecia os alunos, sabendo apenas que estes tinham tido um percurso escolar difícil na disciplina de Matemática A, com vários professores a lecionar a disciplina ao longo do 10º ano. Por outro lado a irregularidade do percurso dos alunos no 10º ano influenciou negativamente a relação entre os Encarregados de Educação e o Conselho de Turma, no ano letivo anterior. Não obstante a incerteza sobre a forma como os alunos e Encarregados de Educação iriam acompanhar o trabalho a desenvolver na disciplina, é de salientar a boa recetividade dos alunos e dos Encarregados de Educação à presença do professor estagiário em sala de aula.

Este ambiente de trabalho foi propício às aprendizagens e, à data da entrega deste relatório é possível apresentar os resultados globais da turma à disciplina.

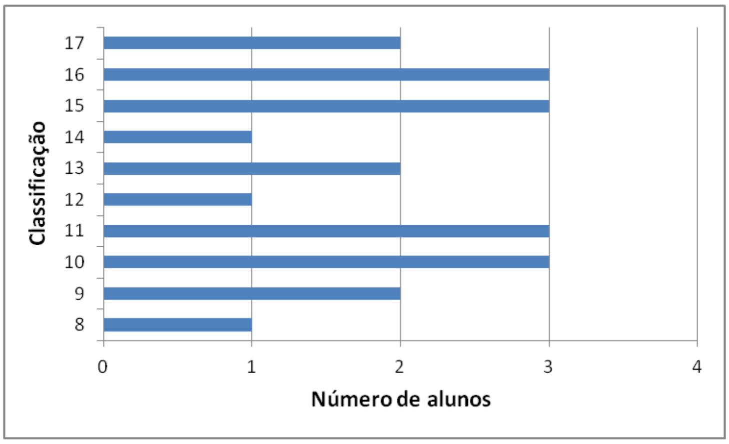



Figura 3.5: Classificação do 3.º período da turma 12.º X

É de realçar, que apesar de algumas classificações inferiores a 10 valores, todos os alunos foram admitidos a exame nacional como alunos internos.

# 4 Prática Pedagógica

Esta turma, relativamente à disciplina de Matemática A, tinha matéria não lecionada em anos anteriores nomeadamente o capítulo de Estatística do 10.º ano e a unidade de Sucessões do 11.º ano e não tendo também sido concluído o capítulo das Funções do 11.º ano. Devido a estes atrasos e por ser ano de Exame Nacional à disciplina, era fundamental garantir o cumprimento integral do programa do ensino secundário, pelo que a escola proporcionou a lecionação adicional de um tempo semanal de 50 minutos ao longo de todo o ano letivo. Assim, o horário da disciplina foi constituído por oito blocos de cinquenta minutos, distribuídos semanalmente da seguinte forma:

| Horas | 2.ª feira | 3.ª feira | 4.ª feira | 5.ª feira | 6.ª feira |
|---|---|---|---|---|---|
| 08:00-08:50 | | Mat. A | | Mat. A | Mat. A |
| 09:00-09:50 | | Mat. A | | Mat. A | Mat. A |
| 10:15-11:05 | | | | | |
| 11:15-12:05 | | | | | |
| 12:15-13:05 | | | | | |
| 13:30-14:20 | Mat.A | | | | |
| 14:30-15:20 | Mat.A | | | | |

Tabela 4.1: Horário da disciplina de Matemática A para o 12.º X

O programa de Matemática A para o 12.º ano atualmente em vigor está dividido em três temas:

1. Probabilidades e Combinatória;
2. Introdução ao Cálculo Diferencial II;
3. Trigonometria e Números Complexos.

O primeiro tema divide-se em três subtemas:

1. Introdução ao Cálculo das Probabilidades, no qual se introduz, entre outros, o conceito de experiência aleatória, definição frequentista de probabilidade e definição clássica de Laplace;
2. Distribuição de Frequências Relativas e Distribuição de Probabilidades, no qual são introduzidos alguns conceitos relativos à distribuição de frequências, tais como: variável aleatória, função massa de probabilidade, modelo binomial e modelo normal;

3. Cálculo Combinatório, no qual os conceitos tratados são: arranjos simples e completos, permutações, combinações, triângulo de Pascal e binómio de Newton.

Tal como o primeiro tema do 12.º ano, o segundo também se divide em três subtemas:

1. Funções Exponenciais e Logarítmicas, no qual se faz, por exemplo, um estudo das funções logarítmicas e exponenciais, aprende-se a resolver equações e inequações exponenciais e logarítmicas;

2. Teoria de Limites, no qual são introduzidos conceitos relativos a limites e continuidade dando a definição de limite segundo Heine, introduzindo o conceito de limites notáveis e o cálculo de algum tipo de indeterminações;

3. Cálculo Diferencial, que é a continuação de um tema iniciado no 11.º ano (Cálculo Diferencial I), no qual se faz um estudo mais pormenorizado do Cálculo Diferencial, desenvolvendo algumas noções dadas no 11.º ano.

O terceiro tema divide-se em dois subtemas, Funções seno, cosseno e tangente e Números complexos:

1. No tema Funções seno, cosseno e tangente é efetuado um estudo completo, utilizando definições dadas no presente ano, das funções trigonométricas analisadas no 11.º ano e apresentam-se aplicações destas funções em situações reais;

2. No segundo subtema, Números complexos, introduz-se o conceito de número complexo, as diferentes representações destes números e algumas representações de domínios planos utilizando condições em variável complexa.

Os temas foram lecionados pela ordem em que foram apresentados.

Como referido inicialmente, a turma X do 12.º ano não completou todas as unidades dos anos anteriores, tais como:

1. Sucessões Reais - 11.º ano;

2. Estatística - 10.º ano.

No tema da Introdução ao Cálculo diferencial I, Funções Racionais e com radicais, taxa de variação e derivada do 11.º ano não foi lecionada a matéria até à definição de derivada de uma função, faltando, por isso, lecionar os subtemas da Função derivada e Derivada de algumas funções e os temas Funções definidas por dois ou mais ramos, Operações com funções, Inversa de uma função e Funções com radicais quadráticos ou cúbicos.

Como o exame nacional de Matemática A no presente ano letivo (2013/2014) refere-se à matéria do 11.º e 12.º ano, era de todo o interesse lecionar a matéria que não tinha sido abordada no ano anterior. Com este objetivo, optou-se por lecionar as Sucessões Reais após a conclusão do tema das Probabilidades e antes de ter sido iniciado o da Introdução ao Cálculo diferencial II. Relativamente à Introdução ao Cálculo Diferencial I, que não tinha sido concluída no ano anterior, foi lecionada antes de iniciar o mesmo subtema no 12.º ano.

Decidiu-se, também, lecionar a estatística do 10.º ano, pois, apesar de não serem conteúdos específicos de exame nacional, este tema é fundamental para a aprendizagem das probabilidades. Esta matéria foi lecionada no início do ano letivo, antes de ser iniciado o primeiro tema do 12.º ano. Esquematicamente, o plano anual da disciplina foi desenvolvido de acordo com a tabela seguinte:

| Período | Tema | Ano | n.º de blocos |
|---|---|---|---|
| 1.º | Estatística | 10.º | 10 |
| 1.º | Probabilidades | 12.º | 49 |
| 1.º | Sucessões Reais | 11.º | 24 |
| 2.º | Introdução ao Cálculo Diferencial II | 12.º | 88 |
| 2.º | Introdução ao Cálculo Diferencial I | 11.º | |
| 2.º e 3.º | Funções Trigonométricas | 12.º | 30 |
| 3.º | Números Complexos | 12.º | 20 |

Tabela 4.2: Plano anual de Matemática A no 12.º ano da turma X

Na tabela 4.2 o tema Introdução ao Cálculo Diferencial I relativa ao 11.º ano foi separado da Introdução ao Cálculo Diferencial II, contudo os dois foram lecionados em simultâneo, tendo sido integrados os conhecimentos não abordados relativos ao 11.º ano durante a aprendizagem da unidade Introdução ao Cálculo Diferencial II.

Cada bloco representa uma aula de 50 minutos e o número de blocos referido na tabela 4.2 foi a previsão apresentada no plano anual da disciplina de

Matemática A do 12.º ano (ver dossier de estágio). Este plano foi elaborado pelas professoras titulares do 12.º ano, sendo elas, a professora Rosário Lopes, a professora Gertrudes Ribeiro e a professora Ana Paula Machado. Ao número de blocos em cada tema, acrescentam-se, ainda, o número de blocos destinados aos testes, fichas de avaliação, à autoavaliação e heteroavaliação.

Os manuais adotados na Escola António Gedeão nos três anos do Ensino secundário foram:

- Novo Espaço 10 - Matemática A (Costa & Rodrigues, 2013) $\rightarrow$ 10.º ano;
- Novo Espaço 11 - Matemática A (Costa & Rodrigues, 2013) $\rightarrow$ 11.º ano;
- Y 12 - Matemática 12.º ano (Andrade, Viegas, Pereira & Pimenta, 2012) $\rightarrow$ 12.º ano.

O estagiário assistiu às aulas lecionadas pela professora orientadora da turma escolhida, o que lhe permitiu não só observar as metodologias de ensino aplicadas como também aprender a evidenciar alguns pormenores do programa de matemática o que será, certamente, muito útil para o seu futuro profissional podendo, assim, auxiliar melhor os alunos a compreenderem determinados conceitos e, consequentemente, a alcançarem um melhor aproveitamento e interesse pela disciplina. Durante a resolução de exercícios por parte da turma de estágio, foi dada liberdade ao estagiário para esclarecer dúvidas, o que lhe permitiu familiarizar-se com as dificuldades e motivações dos alunos. Durante o ano letivo foram discutidos, entre o estagiário e a professora orientadora, pormenores de alguns conceitos, definições utilizadas, resoluções de exercícios e a sequência do programa de matemática nos manuais escolares, o que permitiu ao estagiário ficar sensibilizado não só para algumas dificuldades dos alunos na compreensão de determinadas definições e teoremas, como também para a necessidade de ser crítico em relação ao uso do manual. Por exemplo, num dos temas as soluções de alguns exercícios do manual do 11º ano não apresentavam as notações usadas nos conceitos e exemplos apresentados no próprio manual.

## 4.1 O 1.º Período

No primeiro período foram lecionados 106 blocos de 50 minutos e, como referido anteriormente, foram lecionados três temas. No final das unidades que não eram do 12.º ano, Estatística do 10.º ano e Sucessões Reais do 11.º ano, foram efetuadas duas fichas de avaliação, nas datas 26 de Setembro de 2013 e 12 de Dezembro de 2013. Relativamente à matéria específica do 12.º ano, foram efetuados dois testes, sendo um deles o teste intermédio de Matemática A.

O estagiário lecionou três aulas durante o 1.º período, sendo uma delas assistida pelo Professor Doutor Filipe José Marques (orientador da FCT). Os planos das aulas encontram-se no Dossier de estágio. O estagiário criou três fichas de exercícios, sendo estas referentes às probabilidades, a operações com conjuntos e ao método de indução (uma cópia destas fichas encontra-se no Dossier de estágio).

### 4.1.1 Momentos de avaliação e de diagnóstico

Foram feitos dois testes ao longo do período, ambos sobre o tema das probabilidades. O primeiro teste foi realizado no dia 22 de Outubro de 2013 e o segundo teste, que correspondeu ao primeiro teste intermédio de Matemática A de 12.º ano, foi resolvido no dia 29 de Novembro de 2013.

Para além dos testes e fichas de avaliação referidos, foram feitos dois testes de diagnóstico, um no início das aulas e outro no fim do período. Com o primeiro pretendia-se avaliar o grau de conhecimento dos alunos acerca de estatística e de probabilidades do 3º ciclo e o segundo permitiu rever conceitos de funções e de geometria que não tinham ficado consolidados. Esta informação está sistematizada na tabela seguinte:

| Datas | Ficha |
|---|---|
| 16/09/2013 | Teste diagnóstico - Probabilidades e Estatística |
| 26/09/2013 | Ficha avaliação - Estatística 10.º ano |
| 22/10/2013 | 1.º Teste de avaliação - Probabilidades |
| 29/11/2013 | 1.º Teste Intermédio de Matemática A 12.º ano |
| 12/12/2013 | Ficha avaliação - Sucessões Reais |
| 16/12/2013 | Teste diagnóstico - Geometria e Funções 11.º ano |

Tabela 4.3: Fichas efetuadas ao longo do 1.º período

O estagiário corrigiu, individualmente, algumas fichas e testes da turma a cargo da Orientadora, não corrigindo, no entanto, nenhum teste diagnóstico. Foram utilizados, para essa correção, os critérios de correção fornecidos pela Orientadora ou pelo Ministério de Educação, no caso do teste intermédio.

Esta correção individual permitiu ao estagiário testar as suas capacidades na aplicação de critérios definidos por outros e melhorá-las, e permitiu também, perceber como são feitos esses mesmos critérios.

Depois de ter corrigido os testes individualmente, a Orientadora e o estagiário reuniram-se sempre para comparar e discutir os resultados. Esta discussão permitiu ao estagiário perceber a importância da existência de critérios de correção objetivos e bem pormenorizados, pois quando não o são poderão existir grandes diferenças na classificação de um mesmo teste, quando corrigido por diferentes pessoas. A professora orientadora, ao dar conselhos sobre a criação de critérios de correção, contribuiu ainda mais para a aprendizagem do estagiário no que se refere à construção de materiais essenciais à prática pedagógica.

### 4.1.2 Aulas lecionadas

Neste período o estagiário lecionou três aulas, sendo uma delas assistida pelo Professor Doutor Filipe José Marques orientador da FCT. Esta aula foi sobre o tema das Sucessões do 11.º ano, as outras duas foram sobre Probabilidades do 12.º ano. As aulas foram lecionadas durante os meses de Outubro e Novembro como se pode observar na tabela 4.4.

| **Datas** | **Ano** | **Tema** | **Subtema** |
|---|---|---|---|
| 03/10/2013 | 12.º | Probabilidades | Axiomatização das Probabilidades |
| 17/10/2013 | 12.º | Probabilidades | Cálculo Combinatório |
| 14/11/2013 | 11.º | Sucessões | Método de Indução Matemática |

Tabela 4.4: Aulas lecionadas pelo estagiário no 1.º Período

#### 1.ª Aula- Axiomatização das Probabilidades

Para introduzir o tema da axiomática de probabilidade, o estagiário recorreu à história da Matemática falando um pouco acerca de Hilbert, do paradoxo do mentiroso (curiosidade matemática) e dando um exemplo prático relacionado com futebol (assunto do interesse comum dos alunos). Como este tema é muito teórico, o que geralmente não desperta muito interesse nos alunos, pretendeu-se assim aumentar a motivação dos alunos através da apresentação de situações reais. Explicou-se quando ocorreu a axiomatização na matemática, as causas para ter ocorrido e a importância desta no desenvolvimento da matemática. Assim, o estagiário, introduziu a origem da axiomatização e a sua importância no desenvolvimento da matemática utilizando exemplos práticos o que suscitou interesse e motivou os alunos para a aprendizagem.

Para apresentar a definição axiomática de probabilidade, foi dado um exemplo concreto do cálculo de probabilidades, que permitiu definir a probabilidade de determinado acontecimento e inferir algumas propriedades. Pretendeu-se, ao dar um exemplo concreto do cálculo de probabilidade, que os alunos conseguissem compreender melhor a definição axiomática de probabilidade e dos axiomas. Assim, os alunos reconheceriam e interiorizariam mais facilmente os axiomas das probabilidades.

Depois de apresentada a definição axiomática de probabilidade, demonstrou-se que a probabilidade definida pela regra de Laplace e a definição frequentista de probabilidade verificam esses axiomas. Para terminar foram abordados alguns teoremas das probabilidades, sem os demonstrar, efetuando exercícios de aplicação.

Sendo esta a primeira aula do estagiário, o nervosismo era natural, contudo é de realçar o facto de não terem sido apontadas falhas de caráter científico. De uma maneira geral, a aula correu bem, alguns alunos participaram ativamente na aula, e o estagiário teve sempre o cuidado de tentar perceber se os alunos compreenderam o que foi dado, havendo, no entanto, alguns aspetos a melhorar.

No final da aula, ao analisá-la com a professora orientadora, o estagiário tomou consciência de alguns aspetos menos positivos: o essencial da aula foi pouco reforçado, a referência histórica, apesar de muito bem planificada, foi pouco realçada. Foi ainda evidenciada a necessidade de o estagiário ter um maior cuidado com a linguagem, nomeadamente com a necessidade de reduzir ou eliminar algumas expressões muito frequentes no discurso e que podiam condicionar a atenção dos alunos, como foi o caso da utilização frequente da expressão “ok”.

Estes aspetos menos positivos deveram-se, sobretudo, à falta de experiência e ao facto de ter sido a primeira vez que o estagiário lecionava uma aula e estava perante uma turma.

### 2.ª Aula- Cálculo Combinatório

Introduziu-se o subtema através da resolução de exercícios em conjunto. Foram desenvolvidos o princípio geral da adição e multiplicação e os conceitos de fatorial de um número e de arranjos de n objetos tomados k a k. Pretendeu-se com a resolução conjunta dos exercícios motivar os alunos para os conceitos dados, dando a entender que o princípio geral da multiplicação e da adição era utilizado antes no cálculo das probabilidades, que o fatorial e o arranjo são conceitos fundamentais ao cálculo de probabilidades e que a sua utilização aparece de forma natural, quando se definem estratégias de resolução dos problemas.

Esta aula, mais prática na sua natureza, correu bem no geral, alguns alunos participaram, e, como na aula anterior, tentou-se compreender se os alunos estavam a acompanhar a aula. Tal como na primeira aula a orientadora referiu não terem sido cometidos erros científicos e constatou o facto de ter havido uma evolução muito significativa e muito positiva, em termos de linguagem, uma vez que o uso da expressão "ok" foi pontual e sem qualquer influência no desenvolvimento da aula. Não obstante esta evolução foi referido que, tal como na primeira aula, o essencial da matéria deveria ter sido mais reforçado.

### 3.ª Aula- Método de Indução Matemática (assistida pelo orientador da FCT)

Lecionaram-se dois blocos, onde se introduziu o método de indução matemática integrado no tema das sucessões do 11.º ano. O método de indução não tem de ser lecionado neste tema, pois é um tema transversal do programa do Ensino Secundário, no entanto, como o mesmo estava integrado no tema, no manual do aluno, optou-se pela sua lecionação para rentabilizar o uso do manual escolar, pelos alunos.

Pretendeu-se dar uma aplicação prática do método de indução matemática, e, para isso, foi desenvolvida a soma dos n primeiros termos de uma sucessão aritmética com recurso a um exercício prático. Através do exercício prático deduziu-se uma fórmula para a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética do problema, demonstrando-se de seguida essa fórmula, utilizando o método de indução matemática. Ao inferir a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, pretendeu-se que os alunos compreendessem como se obtinha essa fórmula, e, assim, se apropriassem dela mais facilmente.

De seguida, em conjunto com os alunos, inferiu-se a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma qualquer progressão aritmética, sendo demonstrada utilizando o método de indução matemática. O desenvolvimento do método de indução matemática simultaneamente à dedução da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, tinha como objetivo dar relevância ao método de demonstração em estudo, para demonstrar algumas propriedades das sucessões.

O estagiário sentiu-se confortável à frente da turma sendo, por isso, uma aula que lhe pareceu correr bem, em que alguns alunos participaram ativamente e com alguns aspetos melhorados em relação às aulas anteriores, nomeadamente, o fato de não utilizar a expressão "ok" e no cuidado com a linguagem utilizada.

No fim da aula o Professor Doutor Filipe Marques (orientador da FCT) observou alguns aspetos positivos e menos positivos, indicando alguns aspetos a melhorar nas próximas aulas. O facto de o estagiário não cometer erros científicos, a forma original como introduziu o método de indução e da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, foram aspetos positivos realçados.

Porém, o professor orientador salientou vários pontos que o estagiário deveria melhorar:

- O estagiário deveria tentar evidenciar o essencial da aula. Por exemplo, o estagiário ao demonstrar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, deveria ter reforçado a utilização da hipótese de indução;

- O estagiário deveria referir, em determinados momentos, os objetivos a alcançar;

- O estagiário deveria ter uma atenção constante relativamente à linguagem utilizada, contudo observaram-se melhorias neste aspecto ao longo das três aulas lecionadas.

## 4.2 2.º Período

No 2.º período foram lecionados 100 blocos de 50 minutos, cujo tema foi a Introdução ao Cálculo Diferencial II.

Foram realizados 2 testes de avaliação e 6 fichas de avaliação. Os dois testes recaíram sobretudo sobre o tema Introdução ao Cálculo Diferencial II, porém o tema das Probabilidades também foi abordado nestes testes de avaliação.

As fichas de avaliação foram efetuadas em diversos momentos, com o objetivo de avaliar continuamente o conhecimentos dos alunos.

O estagiário lecionou 5 blocos de 50 minutos, sendo 3 desses blocos assistidos pelo Professor Doutor Filipe José Marques e pela Professora Doutora Maria Helena Santos (orientadores da FCT). Neste período o estagiário criou uma ficha de revisão sobre transformações gráficas de funções. Esta foi realizada pelos alunos no último dia de aulas (encontra-se uma versão desta ficha no dossier de estágio).

### 4.2.1 Momentos de avaliação e diagnóstico

Como referido anteriormente, os momentos de avaliação foram oito, feitos não só através de testes de avaliação como também de fichas de avaliação.

No 1.º período, tanto a orientadora como o estagiário aperceberam-se que as fichas de avaliação só estavam a beneficiar alguns alunos (os melhores) e não os alunos em geral, como era o seu objetivo. Optou-se por dividir as duas fichas de avaliação, em várias fichas com a mesma duração de tempo, mas com menor cotação, e no final seriam escolhidas as 4 melhores. Assim, com este método, obrigar-se-ia os alunos a acompanharem a matéria, o que possibilitaria uma maior consolidação dos conceitos dados em aula e também permitiria que os alunos mais fracos tivessem melhores notas, podendo assim aproveitar melhor estas fichas de avaliação para a classificação final como era o seu objetivo. Esquematicamente efetuaram-se as seguintes avaliações:

| Datas | Fichas | Conteúdos |
|---|---|---|
| 23/01/2014 | 1.ª Ficha de avaliação | Equações e inequações exponenciais e logarítmicas |
| 30/01/2014 | 2.ª Ficha de avaliação | Função inversa<br>Inequações exponenciais e logaritmicas |
| 13/02/2014 | 1.º Teste de avaliação | Tema das Probabilidades<br>Subtema Função exponencial e logaritmica<br>Limite de uma função |
| 14/03/2014 | 3.ª Ficha de avaliação | Limites Notáveis<br>Continuidade num ponto de uma função<br>Assimptotas |
| 20/03/2014 | 2.º Teste de avaliação | Tema das Probabilidades<br>Subtema Função exponencial e logarítmica<br>Teoria dos limites<br>Regras de derivação e função derivada |
| 28/03/2014 | 4.ª Ficha de avaliação | Função derivada e regras de derivação |
| 3/04/2014 | 5.ª Ficha de avaliação | Regras de derivação e função derivada<br>Aplicações do cálculo de derivadas |

Tabela 4.5: Avaliações de conteúdos ao longo do 2.º período

O estagiário fez os critérios de correção do 1.º teste de avaliação, depois de corrigir alguns testes de acordo com esses critérios comparou as classificações obtidas com as da orientadora. Em geral, não houve grandes diferenças nas classificações, apenas algumas décimas. Porém, houve dois testes onde a diferença das notas era relevante, atingindo um valor de diferença. Esta diferença deveu-se ao facto do estagiário ter valorizado muito uma das questões.

É também de reforçar que este teste foi feito, em conjunto, pelo estagiário e a Professora Rosário Lopes, sendo que alguns dos exercícios do teste foram propostos pelo estagiário.

### 4.2.2 Aulas lecionadas

No 2.º período, o estagiário lecionou 5 blocos de 50 minutos, 3 desses blocos foram assistidos pelos orientadores da FCT. A primeira aula lecionada (2 blocos) teve como tema o conceito de limite, tendo sido abordada a definição de limite segundo Heine, e nos blocos seguintes foi abordado o conceito de taxa média de variação e o conceito de derivada. Os planos das aulas encontram-se no dossier de estágio. As aulas foram lecionadas nos meses de Janeiro e Março, como se pode observar na tabela:

| Datas | Blocos | Tema | Subtema | Ano |
|---|---|---|---|---|
| 31/01/2014 | 2 | Introdução ao Cálculo Diferencial II | Definição de limite segundo Heine | 12.º |
| 10/03/2014 | 2 | Introdução ao Cálculo Diferencial I | Taxa média de variação<br>Derivada | 11.º |
| 11/03/2014 | 1 | Introdução ao Cálculo Diferencial I | Função derivada<br>Derivada da função quadrática | 11.º |

Tabela 4.6: Aulas lecionadas pelo estagiário no 2.º Período

### 1.ª Aula - Definição de limite segundo Heine

Esta foi a primeira aula em que o estagiário lecionou dois blocos seguidos.

No primeiro bloco começou por relembrar conceitos importantes para a compreensão da definição de limite segundo Heine, foram eles:

– Limites de sucessões;

– Sucessões convergentes;

– Sucessões divergentes;

– Infinitamente grande e pequeno.

Para isso, foram apresentados alguns exercícios que os alunos foram resolvendo individualmente.

Após relembrar os conceitos acima referidos, foi abordado o conceito de ponto de acumulação de um conjunto. De seguida, analisaram-se vários exemplos para a compreensão desse mesmo conceito. Assim, pretendia-se que os alunos compreendessem e interiorizassem este conceito, pois é importante para a compreensão da definição de limite segundo Heine.

No segundo bloco foi explicada a definição de limite de uma função segundo Heine, tendo sido trabalhada essa definição, dando vários exemplos e fazendo alguns exercícios. Pretendeu-se com estes exercícios e exemplos chamar à atenção dos alunos para alguns pormenores importantes.

Pretendeu-se com esta aula, melhorar alguns aspetos referidos pelo orientador da FCT e através dos exemplos reforçar os conceitos teóricos e alguns pormenores importantes. Pretendeu-se também que existisse uma maior gestão da turma, questionando todos os alunos, e mais especificamente alunos que normalmente não participavam na aula. No geral, a aula teve aspetos positivos e algumas melhorias relativas às aulas anteriores, porém foi referido mais uma vez que o essencial da aula foi pouco reforçado pelo estagiário.

**2.ª Aula - Taxa média de variação e derivada de uma função (assistida pelos orientadores da FCT)**

Na primeira das duas aulas assistidas pelos orientadores da FCT introduziu-se o conceito de taxa média de variação e derivada de uma função num ponto.

O estagiário, utilizando o Geogebra, simulou a queda de uma bola, analisando de seguida o gráfico da função que relaciona o tempo, em segundos, com a distância, em metros, do centro de massa da bola ao solo. Através deste gráfico o estagiário analisou a velocidade média e, a partir deste conceito físico, introduziu o conceito de taxa média de variação para qualquer função. O gráfico permitiu, também dar a intuição geométrica da taxa média de variação. Assim, com um exemplo prático, pretendia-se dar o conceito de taxa média de variação com as suas duas representações, a geométrica e a analítica.

O conceito de derivada de uma função num ponto foi abordado com o mesmo raciocínio. O estagiário analisou o gráfico anterior, mas em vez de calcular a velocidade média, calculou a velocidade instantânea, introduzindo, assim, à custa de um conceito físico, o conceito de derivada de uma função num ponto. Esta metodologia permitiu desde cedo perceber que a derivada de uma função num ponto, geometricamente, é o declive da reta tangente ao gráfico dessa função num ponto, sem esquecer a representação algébrica da derivada de uma função num ponto. Ao terminar a introdução dos conceitos, foram resolvidos alguns exercícios de aplicação, com o objetivo de reforçar os conceitos teóricos.

Um dos aspetos positivos referenciados pelos orientadores da FCT, foi o facto do estagiário, mais uma vez, não ter cometido erros científicos e também evidenciaram, como aspeto positivo, a maneira como a introdução dos conceitos foi feita. O estagiário pretendeu melhorar alguns aspetos menos positivos da primeira aula assistida tentando comunicar com toda a turma, levando a que estes participassem na aula. Também tentou, através dos exercícios e dos exemplos, que os conceitos teóricos fossem mais reforçados.

Contudo o estagiário sentiu que a aula foi demasiado rápida, concluindo mais tarde que uma das razões para isso ter ocorrido foi não ter sistematizado e chamado à atenção para os conceitos matemáticos e para as relações algébricas e geométricas destes conceitos. Os orientadores chamaram à atenção para algumas incorreções de português e do cuidado que deveria tomar com alguma linguagem matemática. Também referiram que na resolução dos exercícios não foi utilizada a interpretação geométrica da derivada de uma função. Referiram alguns aspetos a melhorar na aula seguinte, nomeadamente na linguagem e alguns pormenores destes conceitos que não foram evidenciados.

### 3.ª Aula - Função derivada de uma função (assistida pelos orientadores da FCT)

Nesta segunda aula assistida só foi lecionado um bloco, introduzindo-se o conceito de função derivada e deduzindo-se a regra de derivação para $x^2$. O estagiário começou por relembrar o conceito de derivada de uma função num ponto, chamando à atenção para alguns pormenores que não tinham sido referidos na aula anterior. Para introduzir o conceito de função derivada, começou-se por pedir que os alunos calculassem a derivada da função $f(x) = x^2$ num ponto de abcissa $x = 5$, e ao notar que, do mesmo modo que se obteve o valor da derivada da função para um ponto cuja abcissa é 5, podia-se fazer para qualquer ponto do domínio, definiu-se a função derivada. Pretendia-se, assim, que o conceito de função derivada aparecesse naturalmente.

De seguida e tendo em atenção o gráfico da função $f(x) = x^2$ e ao comportamento das retas tangentes, tentou-se que os alunos induzissem características da função derivada: o domínio, contradomínio e monotonia.

No final, depois de ter induzido que a função afim era um bom candidato, foi demonstrado, através da definição, que a função derivada da função $f(x) = x^2$ era uma função afim.

O estagiário sentiu que a aula correu melhor que a anterior, tendo tomado mais cuidado com a linguagem, e tentado sintetizar e realçar alguns conceitos, contudo os orientadores da FCT observaram que ainda são aspetos a serem melhorados. Um aspeto a melhorar é, também, a escrita no quadro, recorrendo a diferentes cores e tentando organizar a informação. No entanto, é de referir que a organização da informação no quadro também foi dificultada pelo facto de o quadro disponível ser de pequenas dimensões o que obriga à limpeza frequente do mesmo, condicionada pelos diferentes ritmos de registo dos alunos. Assim, nem sempre se consegue um quadro bem organizado, pois é necessário manter alguns registos por mais tempo procurando-se rentabilizar o pouco espaço disponível. Apesar destas condicionantes, este é um aspecto a melhorar e a ter presente na dinamização de uma aula.

## 4.3 3.º Período

No 3.º período foram lecionados os temas Funções Trigonométricas e Números Complexos, decorridos durante 50 blocos de 50 minutos.

Neste período foram realizados dois testes de avaliação, sendo um deles o teste intermédio. No período não foram feitos outros tipos de avaliação, devido a dois fatores: o pouco impacto que estes têm na nota final e a curta duração do período.

O estagiário lecionou um bloco de 50 minutos, sendo este assistido pelo Professor Doutor Filipe José Marques (orientador FCT).

### 4.3.1 Momentos de avaliação

No 3.º período foram feitos dois testes de avaliação, tendo o primeiro correspondido ao segundo teste intermédio do ano letivo 2013/2014.

O teste intermédio deste período foi resolvido no dia 30 de Abril de 2014, no entanto, de um modo geral, correu mal à maioria dos alunos, afirmando que não conseguiram realizar parte do teste e para além disso, havia duas questões relativas a matérias ainda não lecionadas nesse momento. Por estas razões os professores que lecionam o 12.ºano decidiram, em reunião do Grupo Disciplinar, que não iriam corrigir nem avaliar este teste intermédio.

O segundo teste deste período ocorreu na última semana de aulas, no dia 3 de Junho de 2014, incidindo sobre toda a matéria do 12.º ano.

### 4.3.2 Aulas Lecionadas

Neste período o estagiário lecionou uma única aula de um bloco, assistida pelo Professor Doutor Filipe José Marques orientador da FCT, no mês de Maio. A aula foi sobre os Números Complexos, correspondendo à introdução do tema. O plano desta aula encontra-se no dossier de estágio.

### 1.ª Aula - Introdução aos Números complexos (assistida pelos orientadores da FCT)

Nesta aula foi só lecionado um bloco, sendo esta assistida pelo Professor Doutor Filipe Marques.

O estagiário introduziu o conceito de número complexo, começando por fazer uma referência histórica. Deste modo pretendia-se que os alunos se sentissem mais motivados para um novo conceito teórico.

Ao longo dessa referência histórica, introduziu-se o conceito de unidade imaginária e no final da introdução histórica definiu-se o conceito de número complexo e o conjunto dos números complexos. De seguida, foi pedido aos alunos que dessem alguns exemplos desses números com o intuito de reforçar e consolidar o conceito de número complexo.

Os conceitos seguintes foram dados seguindo esta metodologia: introduziam-se alguns conceitos e, de seguida, eram pedidos exemplos. O estagiário pretendeu reforçar os conceitos matemáticos, uma vez que foi um dos aspetos menos bem conseguidos em todas as aulas anteriores.

De uma maneira geral a aula correu bem, o estagiário comunicou e questionou toda a turma, questionando alguns alunos que, ou não estavam atentos, ou não estavam a perceber. Com os exemplos pretendeu reforçar os conceitos teóricos dados.

Nesta aula a professora Rosário Lopes interveio com o intuito de reforçar o que é e não é um número complexo, pois o estagiário, devido à falta de experiência, não pensou nessa questão. O professor Orientador da FCT referiu também que no início da aula a linguagem utilizada não foi muito cuidada, porém ao longo da aula esse aspeto foi melhorando. Observou ainda que, no futuro, o estagiário deveria evidenciar mais os conceitos e alguns pormenores desses conceitos, porém reforçou que com a experiência esses aspetos vão melhorando. Outra questão a ser melhorada é a gestão do quadro, sendo necessário melhorar a organização. Por último observou que apesar de alguns aspectos ainda a corrigir o estagiário foi sempre progredindo e melhorando o seu desempenho em sala de aula ao longo do ano letivo, realçando o facto de não terem sido cometidos erros científicos, o que constitui um aspeto muito positivo e um bom começo para um futuro professor.

## 4.4 O trabalho de direção de turma

O estagiário ao longo do ano letivo 2013/2014 apoiou a diretora de turma do 12.º X, a professora Cristina Nico (professora de Português), acompanhando e apoiando nas suas múltiplas funções. Este acompanhamento permitiu não só conhecer as várias componentes e procedimentos do trabalho de direção de turma, como também reconhecer a importância deste elemento na relação entre os Encarregados de Educação e a Escola.

Uma das funções que o estagiário apoiou foi o registo e a justificação de faltas da turma e, para tal, foi-lhe dado a conhecer o software próprio de gestão de faltas, onde se registam as faltas, as justificações destas e as avaliações. Outra das funções atribuídas foi o auxílio na caracterização da turma, recolhendo informação dos registos dos alunos.

O estagiário esteve presente em todas as reuniões do conselho de turma, o que permitiu conhecer o desempenho, tanto em termos de avaliação como disciplinares, dos alunos nas várias disciplinas e perceber toda a dinâmica de uma reunião deste tipo.

## 4.5 Reuniões de Departamento ou de Área Disciplinar

Em geral, todas as terças-feiras à tarde o Departamento de Matemática e Ciências Experimentais ou o Grupo Disciplinar de Matemática reuniam-se. O estagiário esteve presente em grande parte das reuniões, conhecendo o trabalho desenvolvido tanto pelo Grupo Disciplinar como pelo Departamento. Com a frequência nestas reuniões, o estagiário conheceu o papel destes órgãos no funcionamento e organização da escola, inteirando-se da sua relevância no bom funcionamento da instituição.

As reuniões do Grupo Disciplinar foram as mais comuns, tendo agendas variadas. Alguns dos assuntos tratados foram relativos ao funcionamento do Departamento e do Grupo Disciplinar, tendo sido analisadas as várias atividades do Grupo Disciplinar e o projeto “Pedro Nunes” que visava essencialmente organizar os tempos não letivos dos docentes de Matemática no acompanhamento e apoio a alunos com dificuldades e paralelamente promover a participação dos alunos em algumas competições matemáticas que integram o plano de atividades do Grupo Disciplinar. Em geral, este tempo foi despendido nas atividades docentes, nomeadamente na correção e desenvolvimento de testes e de outras fichas de trabalho, no planeamento de aulas e na avaliação.

As reuniões de Departamento tinham uma periodicidade mensal, podendo esporadicamente ocorrer com maior ou menor frequência em função das questões a tratar. Estas reuniões, como as do Grupo Disciplinar, tiveram agendas variadas. As primeiras reuniões de Departamento tiveram como agenda principal a apresentação e votação de várias atividades para o ano letivo 2013/2014 e a dinamização de alguns projetos. Uma das reuniões de departamento foi dedicada à elaboração de propostas que visaram promover a interdisciplinaridade entre as diferentes disciplinas do departamento.

No início do 2.º período, a pedido do conselho pedagógico, o Departamento reuniu-se para tratar de assuntos relativos aos resultados no 1.º período e à indisciplina. Nesta reunião foram discutidas várias estratégias para resolver o problema da indisciplina e dos maus resultados em algumas turmas e disciplinas, e no final desse período foi apresentada uma proposta para discussão do novo regulamento interno do agrupamento de escolas.

No 3.º período, o Departamento reuniu-se, para discutir assuntos variados entre os quais as aberturas de turmas para o próximo ano letivo.

### 4.6 Aulas de apoio

Durante todo o ano letivo, funcionou às terças-feiras, um bloco de cinquenta minutos que servia de aula de apoio aos alunos, como complemento à sala de aula. Nestas aulas, o estagiário e a coordenadora de estágio forneciam um apoio extra aos alunos, que compareciam de forma facultativa, tirando dúvidas em alguns exercícios, chamando a atenção para pormenores da matéria e propondo alguns exercícios para os alunos resolverem. Havia um grupo de alunos do 12.º X que frequentavam regularmente estas aulas de apoio, o que permitiu ao estagiário conhecer as dificuldades e o empenho de alguns alunos da turma de estágio.

Em simultâneo com as aulas de apoio, alguns alunos do 8.º ano (alunos da professora orientadora no ano letivo anterior) apareciam para se prepararem para o torneio PmatE ou Projeto Matemática Ensino. Este projeto, criado em 1990 pela Universidade de Aveiro, é uma plataforma de ensino desenvolvida em computador, tendo como principal objetivo aumentar o gosto pela matemática. Existia um grupo de alunos que comparecia regularmente, sendo acompanhados tanto pelo estagiário como pela professora orientadora. Em geral, o acompanhamento destes alunos por parte do estagiário aconteceu quando a frequência das aulas de apoio pelos alunos do 12.º ano era reduzida.

## 4.7 Atividade extracurricular

A atividade de professor engloba não só a prática letiva mas também a dinamização de diversos projetos no âmbito escolar. Por isso, o estagiário, para além, das atividades inerentes à prática letiva e ao acompanhamento regular da turma onde decorreu o trabalho de estágio, dinamizou também uma atividade desenvolvida com todos os alunos da escola do 12.º ano inscritos na disciplina Matemática A. Esta atividade decorreu no terminus das aulas, no dia 9 de Junho de 2014.

Para divulgar esta atividade, o estagiário foi presencialmente às turmas do 12.º ano e afixou cartazes (ver figura 4.1) em todos os pavilhões da escola.

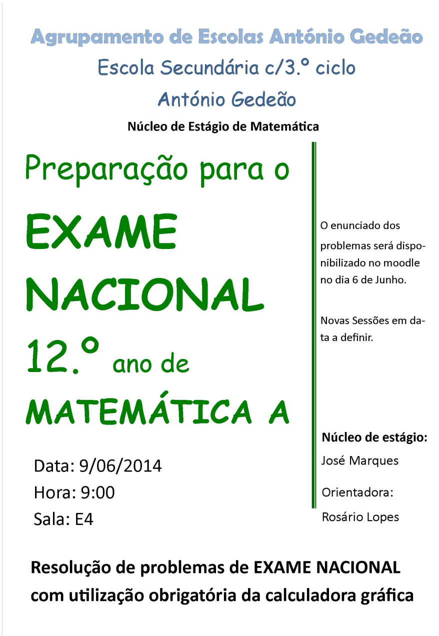



Figura 4.1: Cartaz da atividade

A atividade consistiu na preparação de tarefas relacionadas com o exame nacional com utilização obrigatória da calculadora gráfica. A escolha deste tipo de tarefas deveu-se ao facto de, por um lado, nem sempre ser possível realizar este tipo de questões em sala de aula e, por outro lado, os alunos apresentarem uma elevada dificuldade na resolução de problemas com utilização da calculadora gráfica.

A calendarização desta atividade teve em conta a entrega do presente relatório de estágio, e ao contrário do que se previa inicialmente a participação dos alunos foi elevada, tendo comparecido alunos de todas as turmas.

Para a dinamização desta atividade foram selecionadas tarefas de exames nacionais e testes intermédios com diferentes graus de dificuldades. Estas tarefas foram disponibilizadas antecipadamente na plataforma moodle e distribuídas aos alunos no início da sessão, uma cópia desta ficha está disponível no dossier de estágio. Os alunos revelaram todos muito empenho e motivação na realização das atividades.

Não obstante o término do ano letivo e a conclusão do trabalho de estágio foram agendadas novas sessões de apoio aos alunos até ao exame nacional.

No âmbito do estágio pedagógico pretende-se que sejam proporcionadas experiências nos dois níveis de ensino, Ensino Básico e Ensino Secundário. Como a professora orientadora não tinha nenhuma turma do 3.º ciclo do ensino básico foi, então, proposta a elaboração de uma planificação de médio prazo referente a um subtema do programa de um qualquer ano deste ciclo. O objetivo foi desenvolver, no estagiário, a capacidade de planificar integralmente um dos temas do programa do ensino básico, tendo em conta que o ritmo de trabalho dos alunos deste ciclo de ensino é diferente dos do ensino secundário. Por outro lado, o desenvolvimento da aula tem de estar adequado ao nível etário dos alunos. No dossier de estágio encontra-se essa planificação de médio prazo, juntamente com uma planificação pormenorizada do desenvolvimento da primeira aula bem como um conjunto de exercícios de apoio à lecionação do tema. A planificação de médio prazo refere-se aos critérios de semelhança de triângulos e desenvolve-se em sete aulas de 50 minutos. É de referir que inicialmente a planificação tinha sido elaborada para apenas cinco aulas, no entanto, da discussão do trabalho com a orientadora foi possível concluir que as propostas não eram exequíveis em apenas cinco aula precisamente porque o ritmo de trabalho dos alunos é diferente.

# 5 Reflexão Crítica

O estágio pedagógico pretende proporcionar ao professor estagiário a primeira experiência em sala de aula e num ambiente escolar, de uma forma orientada. Permite conhecer todas as atividades que um professor desenvolve na escola, começando pela lecionação da matéria em sala de aula, pela gestão de uma turma e de um programa, passando pela participação na gestão escolar através das reuniões do Grupo Disciplinar e de Departamento, pela gestão do relacionamento entre escola e encarregados de educação, através da Direção de Turma e, por fim, pela participação e dinamização de atividades extracurriculares.

No estágio pedagógico pretende-se que o estagiário participe, mais ou menos ativamente, nas diversas atividades desenvolvidas por um professor. A participação nas reuniões de Departamento e do Grupo Disciplinar possibilitaram conhecer o trabalho desenvolvido por estes dois órgãos e a importância destes na organização e gestão escolar. O trabalho desenvolvido em conjunto com a Diretora de Turma possibilitou conhecer o *software* de organização e gestão das faltas dos alunos, observar e participar na gestão da relação entre a Escola e os Encarregados de Educação e conhecer todo o trabalho envolvido da Direção de Turma. A frequência nas aulas permitiu observar as metodologias utilizadas pela professora orientadora Rosário Lopes e a gestão da turma. Por outro lado, permitiu conhecer algumas estratégias utilizadas pela orientadora com o objetivo de facilitar a assimilação de alguns conceitos por parte dos alunos. A experiência da orientadora permitiu igualmente compreender a relevância de algumas dessas estratégias na apropriação correta de alguns conceitos pelos alunos. O trabalho regular com a professora orientadora possibilitou também ter noção de todo o trabalho inerente à prática letiva, incluindo a elaboração e correção dos testes.

Durante o estágio pedagógico, algumas aulas foram assistidas pelos orientadores científicos da FCT-UNL (Professor Doutor Filipe Marques e Professora Doutora Maria Helena Santos). Estas aulas assistidas possibilitaram melhorar alguns aspetos, não só a nível da postura do estagiário como também em relação às metodologias utilizadas e à gestão de uma turma. Considera-se no entanto, que algumas experiências podiam ter sido proporcionadas no primeiro ano do mestrado, no âmbito de algumas unidades curriculares.

Ao participar nas aulas de apoio, o estagiário relacionou-se diretamente com alguns alunos de outras turmas e interagiu com alunos de outro ciclo de ensino, nomeadamente na sua preparação para a participação do projeto PmatE. No final do ano letivo, o estagiário participou e desenvolveu uma atividade extracurricular, cujo objetivo era a preparação dos alunos do 12.º ano em questões onde a utilização da calculadora é obrigatória, desenvolvendo assim uma atividade aberta a todas as turmas do 12.º ano.

Como referido anteriormente, o trabalho desenvolvido com a professora orientadora, Rosário Lopes, permitiu tomar conhecimento e participar em tarefas diversificadas como a elaboração de testes, a definição de critérios de correção dos testes e a sua correção. Esta aprendizagem é importante, pois a avaliação é um pilar importante na educação (não sendo o fundamental), porém, uma preparação prévia nesta matéria durante os dois primeiros semestres do Mestrado em Ensino da Matemática do 3.º ciclo e secundário da FCT-UNL poderia ter facilitado o envolvimento do estagiário nestas tarefas. Assim, o estagiário estaria alertado para estas questões e o estágio constituiria um meio de as consolidar.

A professora orientadora tem uma postura muito semelhante à do estagiário, nomeadamente no que se refere à relevância dada aos conceitos e à apresentação aos alunos de estratégias simples que facilitam a memorização e/ou distinção de alguns conceitos matemáticos, tendo sempre o cuidado de manter o rigor científico e clarificando algumas simplificações de linguagem. Ao longo do ano letivo, o estagiário reteve algumas dessas estratégias, que considera muito úteis tanto ao nível da lecionação do 12.º ano como de outros anos de escolaridade.

Como referido anteriormente, as aulas assistidas, para além de serem um momento de avaliação, também foram, para o estagiário, momentos de reflexão, tanto em termos didáticos como científicos. Ao longo das quatro aulas assistidas, foram feitas observações e sugestões de melhoria, úteis ao desenvolvimento profissional do estagiário. A integração destas sugestões na prática docente contribuirão para a melhoria do desempenho futuro do professor em sala de aula. Embora tenha havido uma evolução do desempenho do estagiário no que se refere a alguns aspetos da prática letiva, a existência de um maior números de aulas assistidas pelos orientadores pedagógicos da FCT, e a pressão inerente a essa supervisão poderia permitir ao estagiário melhorar e aperfeiçoar ainda mais a sua prática pedagógica ficando, assim, mais preparado para enfrentar o seu futuro profissional. Também a supervisão prévia dos planos de aula pelo professor orientador da FCT poderia permitir uma maior discussão em torno do desenvolvimento da aula com eventuais benefícios para a sua execução.

Globalmente, todo o trabalho desenvolvido no âmbito do estágio pedagógico foi muito útil e essencial ao desenvolvimento profissional do futuro professor, no entanto, considera-se como aspeto menos positivo o facto do núcleo de estágio ser constituído apenas por um estagiário o que impossibilitou a discussão de algumas temáticas e a implementação de mais atividades extracurriculares.

Parte II

# Conexões Matemáticas entre Geometria e Derivadas - Estudos de Caso

# Conteúdo

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# 1 Introdução

Este trabalho de investigação pedagógica faz parte integrante do estágio realizado na Escola Secundária com 3.º Ciclo António Gedeão que ocorreu numa turma do 12.º ano na disciplina de Matemática A.

Como aluno sempre gostei de Matemática, inicialmente porque era a disciplina em que tinha melhores notas, ao longo dos tempos foi a que me despertava maior gosto e interesse em estudar. Ao ingressar na Licenciatura em Matemática na FCT (Faculdade de Ciências e Tecnologias) da Universidade de Nova de Lisboa deparei-me com várias cadeiras e diversos temas ao longo dos semestres. Inicialmente não me apercebi das inúmeras conexões e relações existentes entre os vários temas e as diversas cadeiras, fui-me apercebendo delas ao longo dos três anos de licenciatura, o que me levou a gostar cada vez mais desta ciência.

Para além disso, ao querer evoluir um pouco mais nesta ciência, notei que muita investigação e que ideias novas apareciam devido às inúmeras relações que os matemáticos faziam entre diferentes temas em matemática. Ou seja, vendo a matemática como um todo e não como uma ciência compartimentada, como eu vi durante alguns anos.

Para muitos investigadores a Matemática é a ciência dos padrões (Devlin, 2002; Sawyer, 2012; Steen, 1988), isto é, os matemáticos procuram padrões dentro da matemática, criando assim novas ideias matemáticas. Por exemplo: o número $\pi$ inicialmente era a razão do perímetro do círculo pelo diâmetro, ou seja, estava relacionado com a medida, hoje em dia, encontramos esse mesmo número associado a tantos outros temas da matemática, por exemplo na estatística o número $\pi$ está presente na função densidade de probabilidade da distribuição normal. Steen (1988, p. 6) completa esta ideia afirmando que:

> Teorias matemáticas explicam as relações entre os padrões; funções e mapas, operadores e morfismos que relacionam um tipo de padrões com outro para manter estruturas matemáticas.

Porém ainda vai mais longe ao afirmar que:

> Aplicações da matemática usam estes padrões para "explicar" e prever fenómenos naturais que se enquadram nesses padrões. (Steen, 1988, p. 6)

Um exemplo deste tipo de padrões é o número de ouro, uma constante matemática obtida da seguinte forma $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, que se aplica ao estudo da espiral formada, por exemplo, na carapaça dos moluscos náuticos denominada por espiral dourada. Esta espiral dourada é obtida construindo um retângulo cujos lados sejam proporcionais à razão do número de ouro (retângulo de ouro) e construindo sucessivamente dentro dele um quadrado e outro retângulo de ouro. De seguida unem-se os quartos de circunferência de todos os quadrados, como mostra a figura seguinte:.

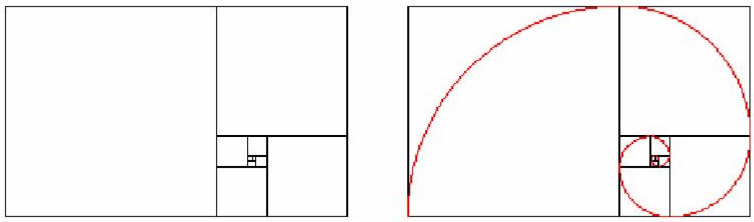


Figura 1.1: Construção de uma espiral dourada

Existe, portanto, uma relação forte entre a matemática e outros assuntos fora desta. Ao longo dos meus doze anos de Ensino básico e secundário os professores falavam desta relação e da importância que a matemática tinha no dia-a-dia, mas nunca me apercebi realmente delas, uma vez que os exemplos dados eram muito fracos. Só ao longo dos três anos da licenciatura é que me apercebi desta realidade, da importância que a matemática desempenha no dia-a-dia e nas outras ciências, isto é, da relação da matemática com assuntos fora da matemática.

Como estudante lamento que estas relações e aplicações nunca tivessem sido devidamente explicadas pois permitir-me-ia gostar ainda mais desta disciplina e talvez gostar mais de outras disciplinas. Como futuro professor considero bastante importante que os alunos resolvam problemas reais ou de outras ciências com o auxílio da Matemática, pois assim ficarão mais interessados, mais motivados e trabalharão com maior gosto.

Os problemas que envolvem conhecimentos de diferentes temas em matemática também têm o seu interesse pois, na minha opinião, podem ser desafiantes para os alunos aumentando o seu gosto por esta ciência e podem permitir-lhes recordar diferentes ideias matemáticas de diversos temas e anos, em diversas situações.

O processo de relacionar a matemática dentro de si mesma e com ideias fora da matemática designa-se por conexões matemáticas (Boavida et al., 2008; Cebola, 2010; Ponte, 2010; Vale & Pimentel, 2010). Existindo então dois tipos fundamentais de conexões:

1. Conexões matemáticas dentro da matemática;

2. Conexões matemáticas fora da matemática.

As conexões matemáticas deveriam desempenhar um papel importante na sala de aula, pois para além do que foi referido anteriormente, permitem mostrar que a matemática não é uma ciência compartimentada, onde se coloca cada conhecimento em cada compartimento sem haver relações entre eles. Pelo contrário, as conexões matemáticas permitem mostrar a matemática como um todo onde as ideias matemáticas se relacionam, ou seja, permitem ver a Matemática como realmente ela é definida, como a ciência dos padrões.

Como objetivo geral deste trabalho de investigação achei pertinente analisar como é que os alunos realizam conexões matemáticas, mais em concreto analisarei conexões matemáticas dentro da própria matemática. Esta análise será feita através da resolução de problemas pois, na minha opinião, será mais interessante para os alunos do 12.ºano, uma vez que lhes permitirá trabalhar conteúdos de diferentes temas e abordados em diferentes anos de ensino, o que poderá ser benéfico na preparação para o exame. Contudo, não considero que este tipo de problemas seja adequado apenas para alunos que irão realizar exames nacionais no presente ano letivo, mas sim para qualquer tipo de alunos. Por opção pessoal, analisarei, concretamente, problemas onde se relaciona o tema genérico da geometria com o das derivadas.

Assim, pretendo, especificamente, responder às seguintes questões:

1. Como é que os alunos resolvem problemas;

2. Como é que as conexões surgem durante a resolução de problemas;

3. Em que passos é que os alunos sentem maior dificuldade na resolução de problemas envolvendo conexões;

4. Quais as principais dificuldades nas conexões matemáticas dentro da própria matemática, no ponto de vista dos alunos;

5. Que tipo de conexões dentro da matemática é que os alunos conseguem fazer.

Com estas questões pretendo perceber como é que os alunos estabelecem conexões matemáticas, não só dialogando com eles e percebendo o que estão a fazer, mas também analisando a perspetiva do aluno sobre a resolução deste tipo de problemas.

No presente trabalho irei recorrer frequentemente ao conceito de ideias matemáticas, que entenderei como sendo o conjunto de representações, processos, raciocínios, teoremas e conceitos de um mesmo tema ou subtema Matemático.

O presente trabalho está dividido em quatro partes:

1-Introdução Faz-se uma breve introdução ao tema genérico, apresentam-se as questões específicas e a estrutura do presente trabalho;

2-Revisão de literatura Faz-se uma apresentação teórica do tema genérico e a literatura que sustenta a investigação realizada;

3-Metodologia Apresenta-se o método utilizado na investigação, analisando o método, a escolha dos alunos e os problemas a utilizar;

4-Análise dos resultados Apresentam-se os resultados obtidos, analisando e interligando-os com a revisão de literatura elaborada;

5-Conclusão Faz-se a conclusão da investigação realizada, apresentam-se os problemas e possíveis linhas de trabalho a desenvolver, tendo em consideração a presente investigação e os problemas surgidos.

# 2 Revisão de Literatura

Nesta secção será feita a revisão de literatura. Faz-se uma introdução teórica das conexões matemáticas e dos problemas, apresenta-se a importância das conexões matemáticas e da resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem da matemática e as dificuldades que os alunos apresentam nas conexões matemáticas e na resolução de problemas. Procura-se, também, dar um sustento teórico ao trabalho de investigação pedagógica realizado.

## 2.1 Conexões matemáticas

Ao pensar em conexão pensa-se em relação, mais concretamente, ligação a algo que está conectado. Segundo o *Dicionário da Língua Portuguesa Tomo I* (n.d.), conexão tem os seguintes sinónimos:

1. Ligação;
2. União;
3. Nexo;
4. Dependência;
5. Coerência;
6. Analogia.

Conexão não é mais do que uma ligação, união entre duas ou mais coisas, a existência de uma dependência e a coerência entre duas ou mais coisas. As conexões matemáticas, portanto, não são mais do que a ligação, união entre ideias matemáticas ou a dependência e a coerência entre ideias matemáticas[1]. Pode-se definir, seguindo este raciocínio e de uma maneira mais global, conexões matemáticas como sendo a relação entre duas ou mais ideias matemáticas. Mas não será esta uma visão muito redutora?

Por exemplo, numa ida a uma mercearia, ao contar as maçãs que se quer, para calcular o valor total das compras ou para calcular o troco a receber, recorre-se à matemática. Estes casos são uma pequena parte dos inúmeros exemplos que podem ser referidos acerca da importância e da relação que a matemática tem com o dia-a-dia. Então, ao definir conexões matemáticas,

[1] Ver definição de ideias matemáticas na pág. 4

não será redutor não contemplar as conexões que a matemática tem com o nosso dia-a-dia, com o mundo real? Será que só se encontram relações entre a Matemática e o mundo real no dia-a-dia?

Os matemáticos têm muitas áreas de interesse, e muitos são tão conhecidos pelo que fizeram na matemática como noutras ciências. Por exemplo, Arquimedes, Pitágoras, Tales, Descartes, Newton são alguns matemáticos famosos (existem muitos outros) que eram, simultaneamente, físicos, interessando-se, por vezes, por mais do que estas duas áreas científicas. Costa (2010, p. 85) afirmou que "A relação entre física e a Matemática é tão antiga como a sua existência.".

Muitos matemáticos desenvolveram teorias importantes tanto na área da física como na da Matemática e muitos conceitos matemáticos importantes foram desenvolvidos devido à física. Existe, portanto, uma relação entre a física e a Matemática. E quem fala da física, também fala da biologia, sociologia, geologia, química, etc., podendo ser encontrados exemplos da relação entre a Matemática e estas ciências. Portanto, ao recorrer à definição anterior de conexões matemáticas não estão a ser consideradas as relações existentes entre as inúmeras ciências e a Matemática.

Ao definir-se conexões matemáticas tem de se ter atenção, não só às relações que a Matemática estabelece dentro dela própria, mas também com as que estabelece fora dela, ou seja, com a realidade e com as outras ciências. Conclui-se que o conceito de conexões matemáticas "é suficientemente elástico para podermos olhá-lo de múltiplas formas" (Carreira, 2010, p. 1). Então, define-se conexões matemáticas como um processo que tem como objetivo ligar a matemática a outras áreas científicas, à realidade e a diferentes tópicos matemáticos (Cebola, 2010).

Tendo em conta a definição anterior de conexões matemáticas, podemos dividi-las em três tipos fundamentais:

1. Conexões dentro da própria matemática;
2. Conexões da matemática com a realidade;
3. Conexões da matemática com outras áreas científicas.

Estes três tipos são defendidos por diversos investigadores (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008; Cebola, 2010), porém segundo Ponte (2010) ainda se pode ter em conta as conexões entre ideias matemáticas de um mesmo tema e entre ideias matemáticas de temas distintos. Sinteticamente, tem-se o seguinte:

1. Conexões dentro da própria matemática:
   (a) Entre conceitos e representações de um mesmo tema;
   (b) Entre conceitos e representações de temas distintos;
2. Conexões da matemática com a realidade;
3. Conexões da matemática com outras áreas científicas.

Mwakapenda (2008) afirma que a matemática é uma disciplina com conexões dentro dela e com outras disciplinas e Silva (2010) realça esta ideia, referindo que as conexões são ligações entre ideias matemáticas e ligações entre a matemática e fora dela.

Neste trabalho será utilizada a categorização das conexões matemáticas utilizada por Ferreira (2012), em que existem dois tipos de conexões matemáticas que, por sua vez, se dividem em dois subtipos, isto é:

1. Conexões matemáticas dentro da matemática:
   (a) Conexões matemáticas entre ideias matemáticas de um mesmo tema;
   (b) Conexões matemáticas entre ideias matemáticas de vários temas;
2. Conexões matemáticas fora da matemática:
   (a) Conexões matemáticas com a realidade;
   (b) Conexões matemáticas com outras áreas científicas.

De seguida, será feita uma análise mais detalhada de cada um destes tipos de conexões matemáticas.

### 2.1.1 Conexões dentro da Matemática

Segundo Wu (2011, p. 5) "a Matemática é uma tapeçaria onde todos os conceitos e procedimentos estão interligados", ou seja constrói-se o conhecimento matemático através das conexões descritivas, numéricas e simbólicas dentro da matemática (Mwakapenda, 2008).

A matemática tem a particularidade de não ser uma coleção dispersa de regras e procedimentos (Vale & Pimentel, 2010, p. 34) e do conhecimento matemático ser criado através das relações entre os vários conceitos. Desta forma, as conexões matemáticas dentro da matemática são inerentes à própria matemática e à criação desta.

As conexões dentro da matemática são, portanto, relações que ligam temas matemáticos, que relacionam representações matemáticas equivalentes e os respetivos processos (Boavida et al., 2008, p. 49), isto é, relacionam ideias matemáticas dentro de um mesmo tema ou entre vários temas.

Referindo alguns exemplos presentes no Programa do Ensino Básico de 2007 (Ponte et al., 2007):

1. Nos números racionais existe uma relação entre as representações décimal e fraccionária;
2. Na álgebra estabelece-se relações entre a representação gráfica e algébrica de uma função;
3. Na estatística existe relação entre as representações em tabela e em gráfico.

Em todos estes exemplos, relacionamos representações, conceitos ou procedimentos de um mesmo tema.

Ponte (2010) refere ainda alguns exemplos, retirados no Programa do Ensino Básico de 2007, de conexões matemáticas dentro da matemática entre ideias matemáticas de vários temas:

1. A relação entre a representação geométrica da solução de um sistema de equações do 1.º grau e as soluções obtidas algebricamente;
2. O estudo algébrico das propriedades do desvio padrão.

Ferreira (2012) acrescenta, ainda, os seguintes exemplos:

3. A relação entre a razão de semelhança, razão de dois números e razões trigonométricas;
4. A relação entre a noção de termo de uma sequência e termo de uma expressão algébrica.

Neste caso relacionam-se procedimentos, conceitos e representações entre vários temas.

### 2.1.2 Conexões matemáticas fora da matemática

As conexões matemáticas fora da matemática são relações entre ideias matemáticas com assuntos fora da matemática, mais especificamente com a realidade ou outras áreas científicas. Segundo alguns autores (Boavida et al., 2008; Cebola, 2010; Ferreira, 2012) consideram-se conexões entre a matemática e a realidade e entre a matemática e outras áreas cientifícas.

#### a) Conexões matemáticas com a realidade

Mwakapenda (2008, p. 2) salienta que as conexões com a realidade

> ...estão relacionadas com o que é a matemática: de onde vem - atividade humana (...) e o que faz - resolução de problemas e entender o mundo e vida diária.

Assim, a matemática está intimamente ligada com a atividade humana e com a realidade. É, por isso, óbvio falar das conexões matemáticas com a realidade. Esta ligação entre a realidade e a matemática, para além de se enquadrar no que é a matemática, permite realçar a importância da matemática no desenvolvimento da sociedade atual (Boavida et al., 2008).

Um dos aspetos fundamentais para esta conexão é a modelação matemática. Ferri (2010) define modelação matemática como um processo que relaciona o mundo real e a matemática, sendo que essa relação se dá nos dois sentidos. Este processo, segundo Matos et al. (1995) decorre ciclicamente passando pelas seguintes etapas:

1. Identificação de uma situação real;
2. Tradução dos aspetos relevantes para linguagem matemática;
3. Investigação sobre o modelo matemático;
4. Obtenção de novas informações acerca da situação real, por meio da tradução dos resultados obtidos através do modelo matemático;
5. Avaliação da adequação e ajustamento dos resultados à situação real.

Frequentemente é necessário repetir estas etapas com vista a melhorar o modelo matemático, por isso, a modelação matemática decorre ciclicamente.

Matos et al. (1995) afirmam, ainda, que este é o modelo geral, que é defendido e seguido pela maioria dos autores, porém existem outros modelos onde determinadas fases são mais ou menos pormenorizadas, dependendo dos autores e da importância que estes dão às diferentes fases deste processo.

A modelação matemática é um aspeto fundamental das conexões matemáticas com a realidade, pois permite que se deixe as estruturas internas da matemática e que se estabeleçam conexões com objetos reais (Ferri, 2010).

#### b) Conexões matemáticas com outras áreas científicas

Costa (2010) afirma que existe uma relação entre a Física e a Matemática, sendo esta relação tão antiga como a existência das duas ciências em questão. Este autor ainda acrescenta que o desenvolvimento de uma está relacionado com os desenvolvimentos da outra. Algum conhecimento matemático construiu-se devido ao desenvolvimento do conhecimento em Física, sendo o inverso também verdade. No entanto, houve conhecimentos matemáticos que não se desenvolveram graças ao desenvolvimento do conhecimento físico, mas sim com o desenvolvimento de outras áreas científicas, ou seja, algum desenvolvimento e construção do conhecimento matemático deve-se à relação desta com as outras áreas científicas, isto é, graças às conexões matemáticas com outras áreas científicas.

Definem-se, por isso, estas conexões como a relação entre ideias matemáticas e ideias de outras áreas científicas (fora da matemática), porém estas relações têm uma característica fundamental, pois não se devem centrar só na matemática, mas sim considerar os dois pontos de vista, o matemático e o da área em questão (Boavida et al., 2008).

A grande diferença entre as conexões matemáticas com outras áreas científicas e as conexões matemáticas com a realidade é que, nas primeiras, tem de se ter atenção ao conhecimento e à linguagem da área curricular específica, enquanto que a conexão matemática com a realidade relaciona-se com as vivências e experiências pessoais e da vida quotidiana.

## 2.2 O ensino e aprendizagem da matemática com conexões

A nossa mente funciona como um aparelho de procura de padrões visto que, desde o nascimento, o nosso cérebro procura padrões num mundo real, isto é tenta descobrir relações entre conhecimentos, procurando fazer conexões

(Baratta-Loroton, 2003), ou seja, ao aprender, estabelecem-se e reformulam-se padrões, relações e conexões construindo novas ligações sinápticas (Ewell, 1997). Por isso, a matemática, vista como ciência dos padrões (Devlin, 2002; Sawyer, 2012; Steen, 1988), está relacionada com o funcionamento do cérebro e com o processo de aprendizagem. A questão, portanto, que se coloca é: Qual é a dificuldade dos alunos com a aprendizagem da matemática?

Boaler (2002) afirma que é o facto dos alunos encararem a matemática como uma ciência compartimentada que tem criado e mantido essa dificuldade e o insucesso. Ma (1999) defende que as conexões matemáticas permitem que os alunos aprendam a matemática como um todo e não como uma ciência segmentada.

Alguns investigadores defendem que uma das características fundamentais do trabalho matemático é fazer conexões (Boaler, 2002; Boavida et al., 2008). Os estudantes devem, por isso, saber fazer conexões matemáticas, isto é, é necessário que os alunos entendam a matemática como um conjunto de ideias matemáticas relacionadas entre si e consigam, também, refletir e descrever essas conexões e, ainda, ligar diferentes áreas dentro da matemática com o intuito de resolver um problema (Boaler, 2002).

Para além disso, um estudante deve dar significado aos novos conceitos matemáticos. Segundo Bishop e Goffree (1986), um novo conceito é significativo quando faz ligação com conhecimentos já existentes, estas ligações podem ser feitas tanto com ideias matemáticas como com ideias fora da matemática. As conexões matemáticas são, portanto, fundamentais para um conhecimento duradouro e profundo da matemática (Vale & Pimentel, 2010). O National Council of Teachers of Mathematics (2000) afirma, ainda, que elas permitem o desenvolvimento de novos conhecimentos e capacidades.

As conexões matemáticas desempenham um papel importante na motivação dos alunos para a matemática (Boavida et al., 2008). Segundo estes autores, as conexões da matemática com a realidade permitem utilizar as experiências anteriores dos alunos e os focos de interesse destes no trabalho e desenvolvimento da aula e, por outro lado, as conexões matemáticas dentro da matemática permitem que os alunos reconheçam a matemática como sendo uma disciplina onde várias ideias estão relacionadas. Vale e Pimentel (2010) referem, ainda, que os vários tipos de conexões desenvolvem a curiosidade e criatividade dos alunos.

Muitas das ideias atrás referidas estão presentes no programa do Ensino

Básico de 2007 (Ponte et al., 2007, p. 6) nos objetivos gerais da aprendizagem da Matemática, que passo a citar:

> Os alunos devem ser capazes de estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas. Isto é, devem ser capazes de:
>
> • identificar e usar conexões entre ideias matemáticas;
> • compreender como as ideias matemáticas se inter-relacionam, constituindo um todo;
> • reconhecer e aplicar ideias matemáticas em contextos não matemáticos, construindo modelos matemáticos simples.
>
> Os alunos devem reconhecer a Matemática como um todo integrado, estabelecendo conexões entre aquilo que já aprenderam e aquilo que estão a aprender em cada momento, mas também ser capazes de a usar em contextos não matemáticos. O estabelecimento de conexões é essencial para uma aprendizagem da Matemática com compreensão e para o desenvolvimento da capacidade de a utilizar e apreciar.

O programa do Ensino Secundário de 2001 (Silva et al., 2001, p. 1) refere que "cada assunto (...) deve ser assunto interessante e útil na abordagem dos diferentes temas" e que, fazer estas conexões ao longo dos vários temas dados durante o ano letivo e ao longo dos anos, possibilita que se amplie e se consolide cada conceito.

Em suma, os alunos devem ser capazes de identificar e estabelecer conexões entre ideias matemáticas e aplicar essas ideias em contextos não matemáticos. As conexões matemáticas permitem aos alunos "ver" a matemática como um todo, estimulando a sua motivação, criatividade e curiosidade, e possibilitando a formação de um conhecimento matemático mais profundo e duradouro e, por último, permitem ampliar e consolidar conhecimentos matemáticos lecionados anteriormente.

No presente trabalho serão analisadas as conexões matemáticas na resolução de problemas e, por isso, de seguida será introduzido o conceito de problema e quais os métodos para a sua resolução.

## 2.3 Problemas

Existem inúmeras tarefas que o professor pode aplicar em sala de aula, sendo uma delas os problemas. Para Ponte (2003) as tarefas têm quatro características fundamentais:

1. Grau de dificuldade - caracteriza a dificuldade da tarefa;
2. Estrutura - caracteriza se o objetivo da tarefa e se os dados estão definidos de forma clara ou não;
3. Contexto referencial - contextualiza a tarefa, ou seja, indica se se trata de um contexto puramente matemático ou numa situação real;
4. Duração - indica a duração da resolução da tarefa.

Tendo em conta as duas primeiras características, obtêm-se quatro tipos de tarefas matemáticas:

1. Exercícios- Tarefas sem grande dificuldade e de estrutura fechada;
2. Problemas- Tarefas com alguma ou grande dificuldade mas de estrutura fechada;
3. Investigações- Tarefas de um elevado nível de dificuldade e de estrutura aberta;
4. Tarefas de exploração- Tarefas fáceis e de estrutura aberta.

Esquematicamente, tem-se o seguinte:

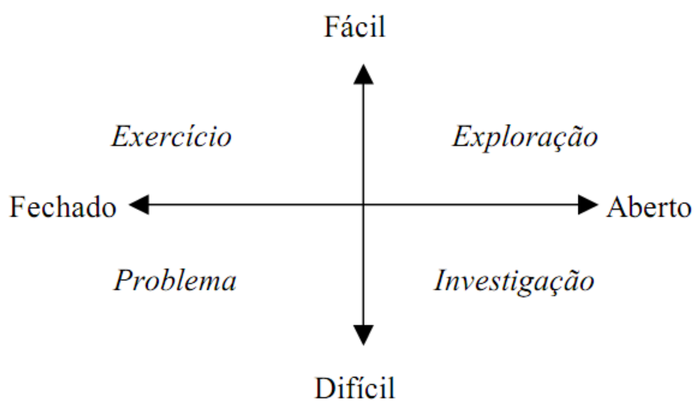



Figura 2.1: Diversos tipos de tarefas matemáticas (Ponte, 2003)

Esta caracterização dos diferentes tipos de tarefas não é absoluta, pois varia dependendo do indivíduo e do seu conhecimento. Por exemplo, existem tarefas que podem ser problemas para uma pessoa e ser um exercício para outra, ou para a mesma pessoa, uma tarefa pode ser um problema quando tem uma determinada idade e, quando mais velho e com mais conhecimento, ser um exercício. Concluindo, definir uma tarefa como sendo um problema não é uma designação absoluta, pois, o facto de ser ou não problema depende do aluno em questão (Boavida et al., 2008; Ponte, 2003).

Os problemas desempenham um papel fundamental no processo ensino-aprendizagem da matemática, uma vez que fomentam o raciocínio, a organização do pensamento, a capacidade de elaborar estratégias e a maturidade intelectual (Boavida et al., 2008). Os autores evidenciam a importância dos problemas para o ensino e aprendizagem da Matemática, porém salientam que outros tipos de tarefas também desempenham um papel importante.

Em termos educacionais, os problemas desempenham um papel muito importante, mas existem problemas melhores e outros piores. Segundo National Council of Teachers of Mathematics (2010) um problema deve respeitar dez características para ser considerado bom:

1. Utiliza ideias matemáticas úteis e importantes;
2. Requer um nível elevado de raciocínio e uma boa aptidão para resolver problemas;
3. Contribui para o desenvolvimento das ideias matemáticas nos alunos;
4. Permite ao professor entender o que os alunos estão a aprender e onde sentem maiores dificuldades;
5. Pode ser encarado de muitas maneiras usando diversas estratégias;
6. Tem várias soluções ou permite tomar diferentes decisões ou posições que devem ser defendidas;
7. Desenvolve o discurso nos alunos e a relação entre estes;
8. Faz a conexão com outras ideias matemáticas importantes;
9. Promove as habilidades matemáticas;
10. Dá uma oportunidade de praticar algumas competências importantes.

Boavida et al. (2008) dão outra caracterização de um bom problema, mais resumida que a anterior:

1. Deve ser compreensível para o aluno, mas sem ter uma solução imediata;
2. Deve ser motivante e desenvolver intelectualmente o aluno;
3. Deve ter mais do que um processo de resolução;
4. Deve integrar vários temas.

Tanto Boavida et al. (2008) como National Council of Teachers of Mathematics (2010) referem características idênticas, sendo uma delas que um bom problema deve fazer a ligação com várias ideias matemáticas, ou seja uma das características fundamentais de um bom problema é a de envolver conexões matemáticas.

## 2.4 Resolução de problemas

Anteriormente definiu-se problema como sendo uma tarefa matemática de estrutura fechada e com um grau de dificuldade médio a alto. A pergunta que se coloca é como se deve resolver problemas?

Segundo Polya (1978) a resolução de problemas deve passar por quatro fases:

1.ª Compreender o problema;

2.ª Estabelecer um plano;

3.ª Execução do plano;

4.ª Retrospeção da resolução.

Estas quatro fases são equitativamente importantes e fundamentais na resolução do problema, pois a não passagem por uma pode conduzir, em última instância, à não resolução ou a uma resolução incompleta. De seguida, serão analisadas, mais aprofundadamente, cada uma das fases referidas.

### 1.ª fase - Compreender o problema

Para se resolver um problema deve-se compreendê-lo. Ou seja, o aluno deve compreender o enunciado e ficar em condições de identificar as partes principais, as incógnitas, os dados e as condições do problema. Polya (1978) divide esta fase em duas partes, sendo a primeira a Familiarização e a segunda o Aperfeiçoamento da Compreensão.

Na primeira parte, a Familiarização, o aluno deve compreender o enunciado, visualizá-lo como um todo, com o máximo de clareza possível e entender o objetivo do problema.

Na segunda parte, o Aperfeiçoamento da Compreensão, o aluno deve interiorizar o problema, começar por isolar as partes principais do problema, determinar as hipóteses, os dados, as condicionantes e o que se pretende obter. O aluno deve considerar cada uma das partes principais do problema, examinando várias combinações e relacionando-as com o problema.

### 2.ª fase - Estabelecer um plano

O aluno conhece o plano a utilizar na resolução do problema quando souber, pelo menos de um modo geral, todos os processos a utilizar nessa resolução, para obter o que se pretende no problema. Porém, esta fase não é fácil, podendo ser um processo difícil e demorado.

A ideia para um plano pode aparecer gradualmente após algumas tentativas falhadas ou pode aparecer de repente, como uma ideia brilhante. Existem métodos de obter essas ideias mais facilmente, um deles é relembrar problemas anteriormente resolvidos e analisar se são semelhantes. Contudo, muitas vezes, existem inúmeros problemas semelhantes e, por isso para escolher o mais adequado analisa-se qual é o que tem a incógnita mais semelhante ou igual. Ao escolher um problema semelhante, o aluno deve analisar se a resolução desse problema poderá ou não auxiliar a resolução do novo problema.

Outro método é a reformulação do problema, isto é, criar uma nova versão do problema, por exemplo através da generalização, particularização, do recurso à analogia, o abandono de parte das condicionantes. Muitas vezes esta reformulação do problema pode levar a problemas auxiliares.

Um dos cuidados que o aluno deve ter é não esquecer onde quer chegar e não se perder na resolução dos problemas auxiliares.

#### 3.ª fase - Execução do plano

Depois de uma fase mais demorada e difícil, a execução do plano é mais fácil. O plano dá uma visão geral da resolução do problema e é nesta etapa que se analisam os detalhes da resolução do problema.

Ao executar o plano, o aluno deve-se questionar da veracidade de cada passo, passando para o próximo passo apenas quando compreender o passo anterior.

Um dos grandes problemas desta etapa pode ser a não compreensão e interiorização do plano para a resolução do problema, no caso de este ter sido dado por outra pessoa ou com muito auxílio de alguém. Contudo se o aluno compreendeu e interiorizou o plano, esta etapa é a mais fácil.

#### 4.ª fase - Retrospeção da resolução

Esta fase é muitas vezes desprezada, tanto por alunos como por professores. No entanto, é uma das fases fundamentais na resolução de problemas, pois é nesta fase que se interioriza o que foi feito durante a resolução do problema.

O aluno, nesta fase, deve reexaminar e reconsiderar o resultado obtido e todas as etapas efetuadas na resolução do problema. Esta análise detalhada da resolução do problema deve levar a que o aluno se questione se esta resolução é a mais simples ou se existem outros métodos de resolução. Permite também que o aluno imagine e pense noutros problemas onde se poderia utilizar a solução do problema e o plano de resolução.

No fundo é nesta fase que o aluno assimila tudo o que foi feito e analisa, de uma forma global, a sua resolução, podendo deste modo melhorar a sua capacidade de resolução de problemas.

Sumariamente, estas são as quatro fases da resolução de problemas propostas por Polya (1978). Boavida et al. (2008) defendem um modelo mais simplificado da resolução de problemas, onde a segunda e terceira fase são consideradas uma só fase, pois frequentemente à medida que se estabelece o plano, este é desenvolvido. Estes autores consideram, então, as seguintes fases:

1. Leitura e compreensão do problema;

2. Elaboração e execução do plano;

3. Verificação da resposta.

Pode-se estabelecer as seguintes relações entre as diferentes fases para a resolução de um problema, propostas por Polya (1978) e por Boavida et al. (2008):

| Polya (1978) | | Boavida et al. (2008) |
|---|---|---|
| Compreender o problema | $\longleftrightarrow$ | Leitura e compreensão do problema |
| Estabelecer um plano<br>Execução do plano | $\longleftrightarrow$ | Elaboração e execução do plano |
| Retrospeção da resolução | $\longleftrightarrow$ | Verificação da resposta |

## 2.5 Dificuldades dos alunos

Anteriormente analisou-se a importância das conexões matemáticas e dos problemas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Interessa, então, perceber quais as principais dificuldades dos alunos nas conexões matemáticas e na resolução de problemas.

Nos relatórios dos exames nacionais entre 2009 e 2012 (Gabinte de Avaliação Educacional, 2010; Sousa, 2011, 2012a, 2013b) é referido, muitas vezes, que os alunos têm dificuldades em questões que envolvem conexões e/ou questões novas ou com enunciado novo. É, também, referido que, em sala de aula, deve haver mais resolução de problemas complexos, que envolvam situações reais.

O relatório de 2012 (Sousa, 2013b) refere que devem ser trabalhadas mais questões envolvendo conexões entre vários tópicos do programa, o que está de encontro com o mesmo relatório e os relatórios anteriores (entre 2009 e 2011) (Gabinte de Avaliação Educacional, 2010; Sousa, 2011, 2012a), visto que estes referem que algumas das questões nos exames nacionais de Matemática A com pior desempenho, envolvem o processo mental de relacionar, ou seja, envolvem conexões matemática. Nos relatórios é, ainda, afirmado que os alunos sentem muitas dificuldades em questões envolvendo demonstrações e em questões com cálculos algébricos complexos nos números reais (Sousa, 2011, 2012a, 2013b).

Esses mesmos relatórios referem que os alunos sentem maiores dificuldades na resolução de problemas diferentes, com enunciados e estratégias de resolução fora do comum.

Contudo, esses relatórios analisam os exames nacionais de Matemática A referentes unicamente à matéria do 12.º ano. Neste trabalho foram também analisados os relatórios dos testes intermédios entre 2010 e 2013, nomeadamente os dados relativos ao 10.º e 11.º anos, com o intuito de perceber a dificuldade dos alunos no tema da Geometria. Nos relatórios de 2009, 2011 e 2012 (Gabinte de Avaliação Educacional, 2009; Sousa, 2012b, 2013a) é referido que os alunos tiveram dificuldades nas questões onde era pedido um modelo matemático de uma área de uma figura dinâmica. No relatório de 2011 (Sousa, 2012b) é ainda referida a dificuldade sentida pelos alunos em relacionar duas variáveis num sólido geométrico.

Para além das dificuldades referidas anteriormente em problemas envolvendo conexões e o tema da geometria, também importa analisar problemas que envolvam geometria e funções, pois uma das principais conexões entre estas duas áreas é a relação entre as representações algébricas e gráficas de uma função. Na investigação de Guerreiro (2009), com alunos do 10.º ano da disciplina de Matemática A, observou-se que estes tinham muitas dificuldades em relacionar a representação algébrica com a gráfica.

Umas das principais razões para a dificuldade dos alunos ao fazerem conexões matemáticas é a não interiorização dos conceitos matemáticos estudados anteriormente, como foi concluido por Maria (2002) no seu estudo sobre conexões matemáticas com alunos do 2.º ciclo e ainda por Leuca (2010) na sua tese de mestrado sobre as conexões matemáticas com alunos do 11.º ano.

Boaler (2002), ao analisar os estudantes nos Estados Unidos da América e do Reino Unido, concluiu que estes vêem a matemática como uma coleção de procedimentos desconexos e padronizados, memorizando um conjunto de processos de resolução de tarefas para os testes, o que leva novamente a uma não interiorização de conceitos. Por último, pode-se pensar que o conhecimento matemático de um aluno influencia a capacidade deste fazer conexões matemáticas, porém Boaler (2002) refere que não existe influência.

## 2.6 Síntese

As conexões matemáticas são processos fundamentais na aprendizagem da matemática e são inerentes à própria matemática. Estas conexões dividem-se em dois tipos: conexões matemáticas dentro da matemática e fora da matemática.

As conexões dentro da matemática são relações entre ideias matemáticas dentro de um mesmo tema ou entre diversos temas. As conexões matemáticas são fundamentais para o ensino da matemática, desempenhando um papel fundamental na motivação, no desenvolvimento da curiosidade e criatividade dos alunos e permitindo a formação de um conhecimento duradouro e profundo da matemática.

Uma das características de um bom problema é envolver a formulação de conexões matemáticas, considerando-se que um problema é uma tarefa com estrutura fechada e com um nível de dificuldade de médio a elevado.

Para resolver um problema, os alunos devem seguir três passos: leitura e compreensão do problema, elaboração e execução do plano e retrospeção da resolução. A passagem por estas três fases é importante, pois a não abordagem de uma delas poderá conduzir à não resolução do problema ou à uma resolução incompleta.

Os alunos sentem muitas dificuldades em questões envolvendo conexões matemáticas ou com um enunciado novo. Uma das razões para este facto deve-se sobretudo à não interiorização dos conceitos estudados anteriormente.

# 3 Metodologia

Na secção anterior fez-se uma revisão de literatura que sustenta o presente trabalho sobre conexões matemáticas. De seguida, será explicada a metodologia utilizada na investigação feita.

O presente estudo foi realizado com alunos de uma turma do 12.º da escola António Gedeão, tendo como objectivo compreender como é que os alunos fazem conexões matemáticas dentro da própria matemática. Mais especificamente, com vista a ter uma compreensão do objetivo geral, serão analisadas as seguintes questões:

1. Como é que os alunos resolvem problemas;
2. Como é que as conexões matemáticas surgem durante a resolução de problemas;
3. Em que passos é que os alunos sentem maior dificuldade na resolução de problemas envolvendo conexões matemáticas;
4. Quais as principais dificuldades nas conexões matemáticas dentro da própria matemática, no ponto de vista dos alunos;
5. Que tipo de conexões dentro da matemática é que os alunos conseguem fazer.

Ao analisar estas questões, observam-se as seguintes características:

1. Os dados recolhidos neste estudo serão qualitativos;
2. Pretende-se perceber como é que os alunos fazem conexões matemáticas, isto é, pretende-se perceber o processo e não analisar o seu final.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), estas características devem estar presentes num estudo qualitativo, que inclui várias estratégias de investigação, tendo, todas elas, características comuns, tais como:

- Os dados recolhidos são qualitativos;
- As questões a investigar são formuladas com o intuito de estudar em pormenor determinado fenómeno no seu ambiente;
- A recolha de dados decorre de um contacto aprofundado com os indivíduos no seu ambiente.

Porém, existem investigações qualitativas que não têm presente uma destas características, não deixando, no entanto, de o ser. Conclui-se que existem diversos graus e diversas estratégias de investigação qualitativa. Neste estudo pretende-se estudar quatro alunos intensamente. Segundo Coutinho e Chaves (2002) a presente estratégia é designada por estudo de caso, que se caracteriza por ser uma investigação qualitativa, na qual se estuda intensa e profundamente algo bem definido.

Segundo Ponte (2006), o estudo de caso tem várias características que estão presentes nesta investigação pedagógica, tais como:

1. O estudo de caso baseia-se em trabalho de campo ou em análise documental;
2. Estudo qualitativo;
3. Investigação não experimental.

Pretende-se analisar como é que os alunos resolvem problemas envolvendo conexões matemáticas, e por isso, os dados recolhidos têm uma natureza qualitativa. Por outro lado, ao estudar os alunos não se consegue controlar todas as características dos mesmos, ou seja, é uma investigação não experimental. Conclui-se que as três características referidas por Ponte (2006) também estão presentes neste estudo. Porém, nem todos os estudos de caso são de qualidade. Ponte (2006) refere que, para obter um estudo de caso de qualidade, deve-se ter em atenção aos seguintes pontos:

- O objeto de estudo estar bem definido;
- Apresentar as características fundamentais do caso;
- Relacionar a investigação feita com outros estudos realizados.

Para obter a informação foi feita uma entrevista individual a cada aluno. Segundo Bogdan e Biklen (1994) a entrevista numa investigação qualitativa pode ser utilizada de duas formas: pode ser a estratégia dominante para a obtenção de dados ou pode ser utilizada em conjunto com a observação participante. Neste caso, como foi feita uma entrevista a cada aluno, estas constituem a estratégia fundamental para a obtenção de dados.

Para responder às questões específicas dos alunos, foi realizada uma entrevista individual a quatro alunos, durante a qual foram resolvidos três problemas. Estes problemas envolviam conexões matemáticas dentro da matemática, entre o tema das derivadas e o da geometria, com um grau de complexidade de médio a elevado, que aumentava progressivamente.

No final de cada questão os alunos foram questionados (Ver Anexo 1) com intuito de perceber quais as principais dificuldades sentidas. Após os alunos terem terminado a resolução das três tarefas, foi feito outro conjunto de questões (Ver anexo 1), com o objetivo de compreender a perspetiva das conexões matemáticas em sala de aula e na aprendizagem da matemática, do ponto de vista do aluno.

As entrevistas decorreram no final da segunda semana e início da terceira semana do terceiro período lectivo, ou seja, nas datas 2 de Maio de 2014, 7 de Maio de 2014 e 8 de Maio de 2014. As entrevistas duraram entre uma a duas horas. Durante as entrevistas os alunos resolveram um conjunto de problemas envolvendo conexões entre o conceito de derivada e o tema da geometria. De seguida, analisar-se-ão as tarefas referidas.

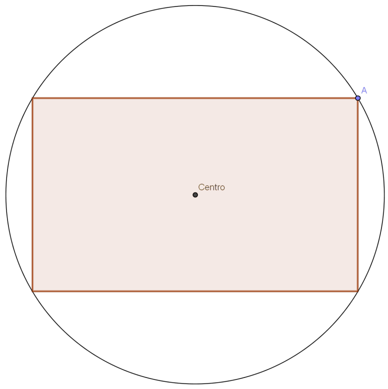
## 3.1 Problemas

Foi entregue aos alunos uma ficha com três problemas (Ver anexo 2), sendo que a terceira tarefa não foi realizada por nenhum aluno devido à falta de tempo. As fichas foram resolvidas individualmente, num gabinete anexo a uma sala de aula. Estas três tarefas são fechadas, isto é, pedem explicitamente o que pretendem, porém têm um grau crescente de dificuldade, portanto e segundo Ponte (2003), estas tarefas designam-se por problemas.

Estes três problemas inserem-se no tema da Geometria, mas para os resolver os alunos têm de passar de um problema geométrico para um problema de derivadas. Como referido, os alunos só resolveram os dois primeiros problemas, portanto só esses serão analisados.

**Problema 1**

Um retângulo encontra-se inscrito numa circunferência de raio 5, como mostra a figura. Diga quais são as dimensões do retângulo para que a área desse retângulo seja máxima.




Com esta questão pretendia-se obter dois tipos de conexões matemáticas dentro da matemática:

- Conexões dentro de um mesmo tema - A área máxima é obtida através do estudo da derivada de uma função, isto é, uma conexão entre a aplicação do cálculo da derivada na obtenção de máximos de uma função e a obtenção da área máxima do retângulo;

- Conexões entre vários temas da matemática - A função a derivar é a função que relaciona uma determinada variável independente com a área do retângulo, isto é, uma conexão entre um função e a área do retângulo.

É explicitado o que se quer no problema, neste caso a área máxima, porém tem algum grau de dificuldade. O problema é semelhante a problemas presentes nos manuais escolares, mas ao contrário desses não é dado nenhum referencial cartesiano, nem nenhuma variável, ou seja, tem menos dados, o que dificulta a sua resolução.

**Problema 2**

> Considere uma circunferência de raio 3 e centro O, e um ponto P sobre essa circunferência. Prove que a reta tangente à circunferência no ponto P é perpendicular à reta OP.

Como afirmado anteriormente, nesta questão eram analisados dois tipos de conexões dentro da matemática:

- Conexões dentro de um mesmo tema - O declive da reta tangente a um ponto é dado pela derivada de uma função, isto é, uma conexão entre a definição geométrica de derivada e a definição algébrica de derivada;
- Conexões entre vários temas da matemática - O gráfico da função a derivar seria parte da circunferência (de modo a que fosse uma função), isto é, uma conexão entre um gráfico de uma função e uma figura geométrica.

Como no problema 1, é explicitado o que se quer, neste caso, é demonstrar a perpendicularidade entre duas retas específicas (a reta $\overline{OP}$ e a tangente à circunferência no ponto P). Este problema não é comum nos manuais escolares, tendo mesmo sido baseado num livro de Edwards et al. (1996), contudo acho possível que um aluno do 12.º, embora com auxílio, o consiga resolver. O facto de ser um problema "novo", e por ser "novo" entenda-se que os alunos nunca o fizeram nem, em princípio, nenhum problema idêntico ou com uma estratégia de resolução semelhante, aumenta a sua dificuldade, como é referido nos relatórios entre 2008 e 2013 (Gabinte de Avaliação Educacional, 2010; Sousa, 2011, 2012a, 2013b). Neste relatórios é também referido que os alunos sentem elevadas dificuldades na resolução de problemas envolvendo demonstrações, o que é o caso deste problema.

Como os problemas têm algum grau de dificuldade os alunos foram auxiliados na sua resolução, porém tentou-se, como referido por Polya (1978), que os alunos tivessem uma sensação de trabalho independente. Para isso, colocaram-se questões e sugestões que se pudessem aplicar a qualquer tipo de problema.

Ambos os problemas só têm uma solução, porém integram vários temas e têm mais do que um processo de resolução. Estes problemas foram pensados para que os alunos os compreendessem e para que fosse possível analisar onde é que eles têm maiores dificuldades, tendo, portanto, algumas das características presentes dos bons problemas (Boavida et al., 2008; National Council of Teachers of Mathematics, 2010): o grau de dificuldade dos dois problemas é uma característica de um bom problema pois, segundo o National Council of Teachers of Mathematics (2010), um bom problema requer um nível elevado de raciocínio e boa aptidão para a resolução de problemas.

## 3.2 Escolha dos alunos

Como visto, anteriormente, os alunos resolveram dois problemas com algum grau de complexidade. Portanto, os alunos a selecionar deviam ser ou bons a matemática ou gostarem de resolver desafios e problemas e, para além disso, deve ter-se em consideração as suas disponibilidades e interesse para participar no estudo. Tendo em conta estas características, os alunos escolhidos desenvolveriam alguma estratégia de resolução do problema (sendo essa adequada ou não para a resolução do problema). Deste modo, seria possível obter dados para o presente estudo.

É importante referir que "ser bom a matemática" não se refere apenas à classificação do aluno na disciplina, mas também à sua capacidade de compreensão e resolução de problemas e à sua intuição para a matemática. A escolha dos alunos baseou-se nesses três fatores, que foram analisados, durante o ano letivo 2013/2014, enquanto participante das aulas regulares e das aulas de apoio, segundo quatro perspetivas:

- A análise de alguns testes de avaliação - permitiu identificar alunos com abordagens menos comuns na resolução de algumas questões;
- A observação em sala de aula - permitiu analisar o interesse manifestado pelos alunos na realização de algumas tarefas bem como algumas das suas intervenções;
- A análise das aulas de apoio - permitiu observar a maior ou menor dificuldade com que os alunos compreendiam as explicações de alguns exercícios e reagiam a propostas de exercícios mais complexos;
- A opinião da professora Rosário Lopes que é mais experiente, ajudou na análise e interpretação das intervenções e desempenho dos alunos.

A escolha incidiu sobre quatro alunos, dois com as melhores notas (no caso da turma com classificações de 16 e 17) e outros dois alunos com classificações mais baixas, mas positivas a matemática. Depois da análise da turma e tendo em conta a disponibilidade e interesse que os alunos apresentavam para participar no estudo decidiu-se pelos seguintes alunos:

- Tiago e Beatriz - são os alunos com melhor classificação e revelam uma boa capacidade de resolução de problemas;
- Manuel - é um bom aluno, que também revela algumas capacidades na resolução de problemas e com intervenções em sala de aula pertinentes;
- Rui - não sendo tão bom como o Manuel, revela gosto por desafios e problemas matemáticos, sendo persistente nessas resoluções.

Esquematicamente, os alunos têm as seguintes características:

| Nomes | Idade | Média 10.º e 11.º ano | Repetente/Melhoria | Acompanhou a turma desde o 10.º ano |
|---|---|---|---|---|
| Tiago | 17 | 14 | - | Sim |
| Beatriz | 18 | 14 | Melhoria | Não |
| Manuel | 18 | | Repetente | Não |
| Rui | 18 | 10 | - | Sim |

Tabela 3.1: Características dos alunos

Observando a tabela 3.1 constata-se que dois dos alunos selecionados estão a repetir o 12.º ano. Estes dois alunos não acompanharam a turma nos anos letivos anteriores, implicando, assim, que apresentam diferentes metodologias de ensino, diferentes abordagens e, consequentemente, diferentes interiorizações dos conceitos. A existência destes casos no presente estudo permitiu analisar se as dificuldades dos alunos na resolução dos problemas envolvendo conexões matemáticas pode ou não dever-se à qualidade da interiorização dos conceitos.

Como referido, as datas das entrevistas foram variadas e a duração destas também. Na seguinte tabela observa-se as durações totais, o dia ou dias das entrevistas e a duração parcial da resolução de cada problema.

| Alunos | Duração Total | Problema 1 | | Problema 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Data | Duração | Data | Duração |
| Tiago | 1 hora | 2/05/2014 | 28 min. | 2/05/2014 | 24 min. |
| Beatriz | 1 hora e 20 min. | 2/05/2014 | 32 min. | 2/05/2014 | 41 min. |
| Manuel | 1 hora e 25 min. | 5/05/2014 | 35 min. | 5/05/2014 | 40 min. |
| Rui | 1 hora e 50 min. | 2/05/2014 | 53 min. | 6/05/2014 | 50 min. |

Tabela 3.2: Entrevistas aos alunos

Na tabela 3.2 a duração total refere-se não só à resolução dos problemas mas também às questões feitas aos alunos sobre as conexões matemáticas. É de notar que só um aluno não resolveu os dois problemas de seguida e no mesmo dia, porém este facto não implica que os dados obtidos sejam de menor qualidade, pois o aluno apresenta as mesmas dificuldades (como analisado posteriormente) na resolução dos dois problemas.

# 4 Análise de dados

## 4.1 Tiago

### 4.1.1 Caracterização do Tiago

O Tiago tem 17 anos e pretende seguir uma carreira militar. A mãe é a encarregada de educação, tendo terminado o ensino secundário e o pai só terminou o ensino básico. Como referido anteriormente, teve nota final no 2.º período de 17 valores e no 1.º período a sua classificação foi de 18 valores. A classificação na disciplina de matemática ao longo do presente ano letivo tem sido muito diferente das classificações obtidas nos anos anteriores, como se pode observar na tabela 4.1.

| Períodos | 1.º | 2.º | 3.º |
|---|---|---|---|
| 10.º | 10 | 15 | 13 |
| 11.º | 13 | 14 | 15 |

Tabela 4.1: Notas 10.º e 11.º ano

Este aluno acompanha a turma desde o 10.º ano, por isso a diferença de notas pode dever-se sobretudo à instabilidade vivida pelos alunos no decorrer do 10.º ano na disciplina de matemática - várias substituições de docentes ao longo do ano letivo e muita matéria em atraso para recuperar no ano letivo seguinte.

Como referido anteriormente, o Tiago é um dos melhores alunos da turma. Desde o início do ano letivo tem vindo a surpreender positivamente, por algumas observações em sala de aula e nas aulas de apoio. Compreende facilmente o que lhe é explicado e demonstra ser um aluno empenhado, participativo e com alguma facilidade na compreensão de novos conteúdos matemáticos, no entanto, observando o seu caderno diário nota-se que é um pouco desorganizado.

### 4.1.2 Problema 1

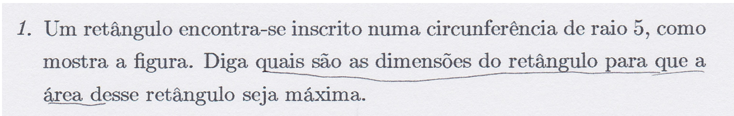
#### Resolução do problema

O Tiago demorou sensivelmente 28 minutos a resolver o primeiro problema. A resolução tem duas fases bem definidas:

1. O Tiago fez uma análise do problema, percebendo o que se quer saber, os dados que tem e o que pode obter imediatamente com esses dados;

2. O Tiago elaborou um plano de resolução ao mesmo tempo que o foi executando, porém só o conseguiu elaborar o plano com algum auxilio.

Na primeira fase o aluno sublinhou o que era pedido:



*1.* Um retângulo encontra-se inscrito numa circunferência de raio 5, como mostra a figura. Diga quais são as dimensões do retângulo para que a área desse retângulo seja máxima.

Figura 4.1: Problema sublinhado

O aluno acrescentou ainda, na figura do problema, o raio da circunferência e o valor deste, e ainda, ao lado dessa figura, as fórmulas da área do retângulo e da circunferência e o valor da última, como se pode ver na figura 4.2 (evidenciado a vermelho).

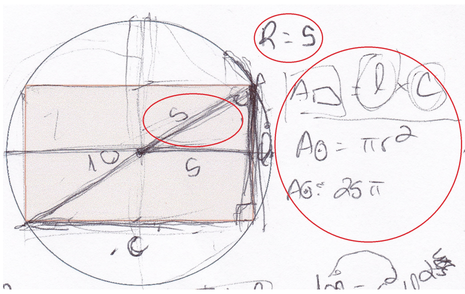



Figura 4.2: Primeiros passos na resolução do problema

Na segunda fase, o Tiago começou por tentar obter o comprimento do retângulo inscrito na circunferência, fazendo o que está evidenciado a vermelho:

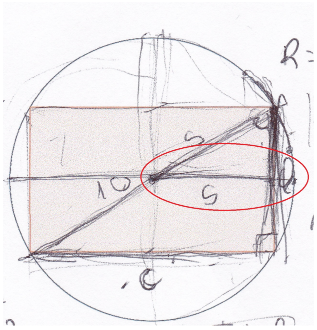


Figura 4.3: Tentativa de obtenção do comprimento de um lado do retângulo

Ao ser questionado porque é que o segmento de reta evidenciado na figura 4.3, media 5, o aluno chegou imediatamente à conclusão que estava errado.

A partir deste momento o aluno não soube o que fazer e, por isso, a resolução do problema foi acompanhada através de questões que lhe permitissem chegar ao pretendido.

Até ao momento o aluno não tinha conseguido fazer nenhuma conexão entre a área máxima e o conceito de derivadas, o que é comprovado pela resposta do aluno quando lhe foi perguntado se sabia como obter a área máxima:

> Nunca percebi muito bem estas perguntas que têm áreas e que têm um ponto P que se desloca (...) sempre me baralhou

O Tiago foi questionado se se lembrava de algum problema de cálculo de máximos, ao que este respondeu que esses problemas são de funções, acrescentando de seguida que "é um retângulo e aqui não há nenhuma função". O aluno lembrou-se da relação entre o cálculo de máximos e o cálculo de derivadas, porém como não observou nenhuma função não conseguiu desenvolver esta ideia.

### Conexões dentro da matemática

Nas conexões dentro de um mesmo tema, a área máxima deve ser obtida através do estudo da derivada de uma função. O Tiago teve algumas dificuldades em perceber esta conexão, contudo uma das razões para esta dificuldade deveu-se sobretudo ao facto de não ter conhecimento que existe uma função que descreve a área do retângulo, como observado anteriormente.

Porém, neste problema, pode-se observar duas conexões entre vários temas:

- A relação entre as funções e a geometria, pois tem de se obter uma função para a área do retângulo;
- A relação entre o valor máximo e maximizante da função e a solução do problema geométrico.

O Tiago conseguiu facilmente fazer a passagem do maximizante da função para a solução do problema geométrico, o que é comprovado com a seguinte afirmação:

> Sabemos que ela atinge o máximo quando c é $\sqrt{50}$ agora vamos calcular o l

No contexto do problema resolvido pelo Tiago o c é o comprimento do retângulo e l a largura.

Em termos de conexões matemáticas parece, à primeira vista, que o aluno não consegue fazer nenhum tipo de conexão dentro da própria matemática, porém ao analisar mais profundamente, percebe-se que ele consegue ter noção de uma relação entre o cálculo de uma derivada e a área máxima, no entanto, não o afirma porque não entende a relação entre a área do retângulo e uma função.

### Dificuldades na resolução do problema

Em termos de procedimentos, o Tiago cometeu algumas erros, que foram resolvidos graças à intervenção do investigador como, por exemplo:

- Na relação entre o comprimento ($c$) e a largura ($l$), partindo do teorema de Pitágoras:

$$\frac{100}{c^2} = l^2$$

Figura 4.4: Tentativa de relacionar a largura com o comprimento

- No cálculo da derivada da função:

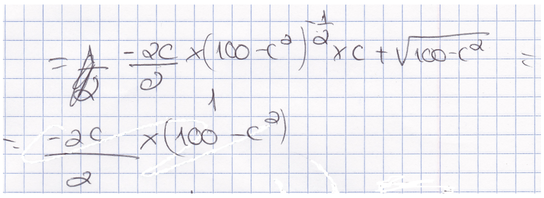


Figura 4.5: Simplificação da derivada da função

Outra das dificuldades do Tiago está relacionada com a obtenção de uma função, com a qual se obtinha a área do retângulo conhecendo uma das variáveis (o comprimento ou a largura do retângulo). Inicialmente, a área do retângulo era dada em função do comprimento e da largura, o aluno tinha então de descobrir uma relação entre o comprimento e a largura. Ao perguntar-lhe sobre essa relação respondeu que:

> Quando isto (referindo-se ao comprimento) aumenta isto (referindo-se à largura) vai diminuir

Ele compreendeu que existe uma relação entre o comprimento e a largura do retângulo, mas, até esse momento, não conseguiu relacionar algebricamente estas duas variáveis. Ao perguntar-lhe se conseguia descobrir uma relação algébrica entre o comprimento e a largura do retângulo, ele relacionou a área do retângulo com o comprimento e largura, como se mostra na seguinte figura:

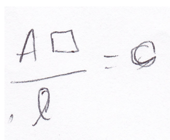


Figura 4.6: Tentativa de relação entre o comprimento e largura do retângulo

Apenas quando questionado sobre as propriedades do retângulo, o Tiago foi capaz de concluir que deveria utilizar o teorema de Pitágoras para encontrar uma relação entre o comprimento e a largura:

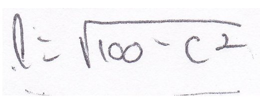


Figura 4.7: Relação entre o comprimento e a largura

O aluno obteve, assim, a área do retângulo dada em função do comprimento:

$$A_{TJ} = \sqrt{100 - c^2} \times c$$

Figura 4.8: Área do retângulo

Resumindo o Tiago apresentou dificuldades em obter um modelo matemático para a área de uma figura dinâmica e na relação entre o comprimento e a largura.

### 4.1.3 Problema 2

#### Resolução de problemas

O Tiago demorou sensivelmente 24 minutos a resolver este problema, mas devido à complexidade do problema a resolução foi acompanhada desde o início.

O Tiago começou por sublinhar o que se queria demonstrar:

*2.* Considere uma circunferência de raio 3 e centro O, e um ponto P sobre essa circunferência. Prove que a reta tangente à circunferência no ponto P é perpendicular à reta OP.

Figura 4.9: Problema sublinhado

De seguida, desenhou uma circunferência, um ponto P na circunferência, a reta tangente à circunferência nesse ponto, o raio e o seu valor, como mostra a figura 4.10. De notar que as coordenadas do ponto O foram colocadas posteriormente.

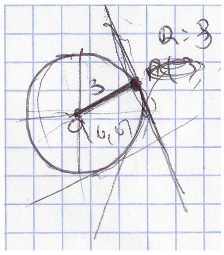


Figura 4.10: Primeiros passos na resolução do problema

Após desenhar esta circunferência, o aluno, depois de alguns momentos a refletir, foi questionado se tinha alguma ideia para resolver o problema, ao que respondeu que "normalmente agora quando fala de retas tangentes tem-se de fazer umas derivadas", ou seja, conseguiu relacionar a reta tangente com a derivada. Contudo afirma "não sei, não tenho aqui nenhuma função para fazer a derivada (...) e não me parece que vá conseguir arranjar alguma", por isso, não conseguiu prosseguir com esta ideia, por não conseguir vislumbrar uma função, isto é, por não conseguir relacionar diferentes temas.

### Conexões dentro da matemática

Como analisado anteriormente, o Tiago relacionou a derivada e a reta tangente, contudo, não prosseguiu com essa relação, pois não identificou nenhuma função. É interessante perceber, então, como é que o aluno concluiu que existe uma função neste problema, pois a dificuldade do aluno em não prosseguir com a conexão dentro de um mesmo tema deveu-se, sobretudo, ao facto de não conseguir relacionar uma figura geométrica (circunferência) com uma função.

Ao não conseguir encontrar nenhuma função, tentou resolver o problema de outra maneira, mas não o conseguiu (será analisado posteriormente o que fez). Depois desta tentativa falhada, o aluno começou por atribuir coordenadas arbitrárias ao ponto P, como se observa na figura 4.11.

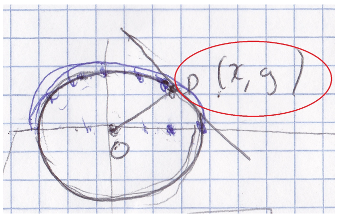



Figura 4.11: Coordenadas do ponto P

Após ter sido questionado sobre a relação entre o $x$ e o $y$, o Tiago conseguiu definir a equação da circunferência (a verde na figura 4.12), conseguindo relacionar o $y$ com o $x$ (a vermelho na figura 4.12):

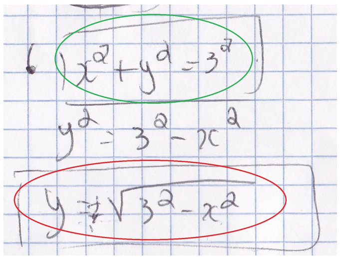



Figura 4.12: Equação da circunferência e relação entre $x$ e $y$

Supôs, de seguida, com algum auxílio, que poderia considerar dois pontos P, com ordenada negativa ou positiva. O aluno considerou, então, o ponto P de ordenada positiva, como se observa na seguinte figura:

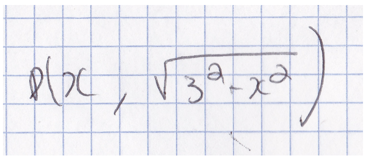



Figura 4.13: Coordenadas do ponto P

Através desta relação e após ter sido questionado novamente se não havia nenhuma função, o aluno disse que "isto pode ser uma função" apontando para a relação positiva entre $y$ e $x$ presente na figura 4.12 (evidenciada a vermelho), acrescentando ainda que "*f(x)* pode ser igual a isto". Contudo, mesmo percebendo que era uma função, o aluno não foi capaz de compreender o seu significado, porque ao ser questionado sobre qual era a representação gráfica da função, a sua primeira resposta foi "parábola".

**Dificuldades na resolução do problema**

O Tiago teve dificuldades na resolução do problema, devido, principalmente, a não conseguir relacionar dois temas diferentes, a geometria e as funções. Porém, ao longo da sua resolução cometeu dois erros principais. O primeiro erro foi comentado anteriormente: o aluno ao ver a expressão da sua função e ao ser questionado que representação gráfica era, respondeu imediatamente que seria uma parábola, e, ao ser questionado sobre o porquê, respondeu "porque tem quadrados".

Esta dificuldade, para além de estar associada à não conexão entre diversos temas, também está relacionada com dificuldades em relacionar diferentes representações nas funções, neste caso, uma representação gráfica com a algébrica.

O segundo erro foi não perceber como demonstrar o que se pretendia. A primeira tentativa da resolução do aluno foi considerar as seguintes coordenadas do ponto P:


Figura 4.14: Outras coordenadas para o ponto P

De seguida, considerou o vetor $\overrightarrow{OP}$ e calculou a partir deste vetor o declive da reta $\overline{OP}$:

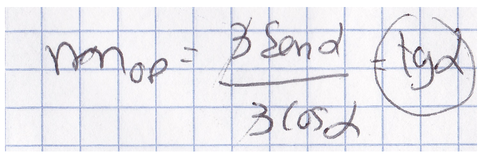



Figura 4.15: Declive da reta $\overline{OP}$

O aluno sabia que, sendo $m$ o declive de uma reta o declive da reta perpendicular era $-\frac{1}{m}$. Considerou, então, o declive da reta perpendicular:

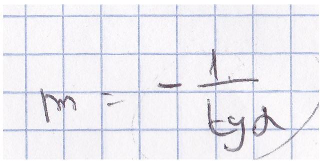



Figura 4.16: Declive da reta perpendicular

Desta forma, iria obter a ordenada na origem da reta perpendicular à reta $\overline{OP}$. Considerando que essa reta passava pelo ponto P:

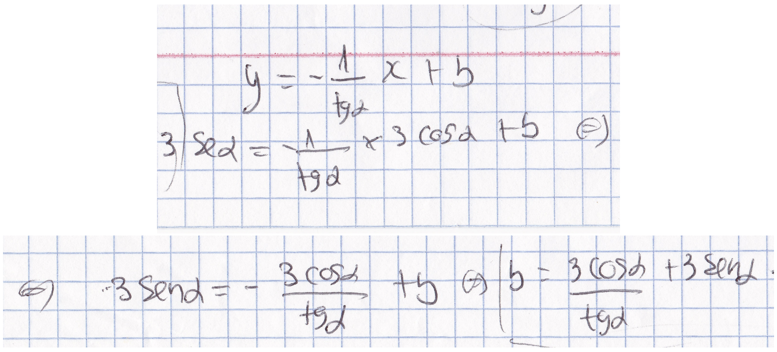



Figura 4.17: Obter a ordenada da origem

Ao obter o $b$ afirmou que "agora já sei uma equação da reta tangente", e assim pensou que tinha provado que as duas retas eram perpendiculares. Porém, o aluno obteve essa reta tangente, recorrendo ao facto de as duas retas serem perpendiculares, contudo, este facto é o que queria demonstrar. Concluiu-se, então, que o Tiago não entendeu como é que se processa uma demonstração.

### 4.1.4 Opinião do aluno

**Problema 1**

O Tiago referiu ter sentido dificuldades na resolução do primeiro problema, nomeadamente na interpretação do problema, afirmando que "é difícil de interpretar, de ver o que ia fazer", ou seja, o que o aluno entende como interpretação do problema consiste na elaboração de um plano para o resolver. Referiu também que os cálculos exigidos eram complexos. Estas duas dificuldades já tinham sido observadas e analisadas anteriormente.

Ao ser questionado se se tinha apercebido da utilização da derivada, o Tiago respondeu:

> Logo (...) não, só passado um bom bocado

No entanto, ao ter sido referido que o problema envolvia a área máxima, o aluno afirmou que "pois ao início pensei que poderia ser isso, mas depois não vi nenhuma função nem nada". Esta dificuldade apontada pelo Tiago está de acordo com as dificuldades observadas, porém, o aluno relacionou a derivada com a área máxima mais cedo do que observado, desistindo dessa ideia por não conseguir relacionar uma função com a área do quadrilátero.

Ao ser questionado sobre a passagem de um problema de geometria para as funções, este aluno comentou que "quando cheguei às funções era mais fácil". Desta forma, muitas das dificuldades sentidas podem-se ter devido, sobretudo, às dificuldades que este aluno apresenta em relação ao tema da Geometria.

#### Problema 2

Na opinião do Tiago, o segundo problema era mais difícil que o primeiro, referindo a mesma dificuldade na elaboração de um plano para a resolução do problema:

> Era mais difícil de interpretar do que o outro (...) porque só dão uma circunferência e um ponto de onde vou obter uma função

O aluno afirmou que o facto de se ter lembrado tão facilmente da relação entre a reta tangente e a derivada deveu-se, sobretudo, ao facto de já ter feito muitos exercícios semelhantes, ou seja, ter consolidado esta relação auxiliou-o a resolver a questão. Salientou, por último, que a relação entre a geometria e as funções era complicada, nomeadamente perceber que a equação da circunferência resultava numa função que se queria derivar.

#### Opinião geral

O Tiago ao ser questionado sobre o que é a matemática, responde:

> A matemática é problemas, é preciso estar com atenção e é uma mistura de números e letras.

O Tiago dá uma definição incompleta de matemática, pois define-se matemática como sendo a ciência dos padrões, que procura relações entre vários temas e entre a matemática e as outras ciências. Este aluno não considera essas relações na matemática e ao ser questionado explicitamente se achava que havia relações entre os inúmeros temas na matemática, respondeu que:

> Eu sempre pensei que entre a geometria e as funções (...) não tinha nada a ver uma coisa com outra, mas depois, agora aqui, nestes problemas está tudo relacionado.

Antes de resolver estes dois problemas, o Tiago achava que não havia nenhuma relação entre o tema das Funções e da Geometria, e só com estes problemas é que se apercebeu que existem relações entre estes dois temas. Ao analisar esta afirmação do Tiago, identifica-se uma das causas para que o aluno sinta algumas dificuldades na resolução de problemas envolvendo conexões matemáticas, pois estes tipos de questões eram novas para o aluno. Esta análise é mais evidente quando o aluno afirma que não está habituado a fazer este tipo de questões em sala de aula nem no estudo.

O Tiago também não considera útil na aprendizagem da matemática este tipo de processos, afirmando que "Se isto sair no exame era útil".

### 4.1.5 Síntese

O Tiago resolve os problemas passando por duas fases das designadas por Boavida et al. (2008): a análise do problema e a elaboração e execução do plano. Em ambos os problemas o aluno não fez uma retrospeção da resolução (sendo esta a terceira fase), o que era previsível por Polya (1978), pois este refere que os alunos tendem a desprezar esta fase.

As conexões matemáticas aparecem na segunda fase da resolução de problemas. Uma das estratégias utilizadas pelo aluno para realizar as conexões matemáticas dentro de um mesmo tema é pensar em problemas análogos feitos anteriormente, sendo esta uma das estratégias propostas por Polya (1978), na elaboração de um plano de resolução de problemas.

No primeiro problema a principal dificuldade sentida pelo aluno nas conexões dentro do mesmo tema, ou seja, na relação entre o cálculo de um máximo e o cálculo da derivada, deveu-se ao facto de não conseguir relacionar as funções com a geometria, mais concretamente a relação entre a área do retângulo e uma função, o que vai ao encontro com alguns estudos internacionais e nacionais. Dentro destes estudos salienta-se o de Boaler (2002), que referiu que os alunos ingleses e americanos viam a matemática como uma coleção de procedimentos desconexos, apresentando dificuldades em relacionar ideias matemáticas entre diferentes temas, e salientam-se também os relatórios dos Exames Nacionais entre 2009 e 2012 (Gabinte de Avaliação Educacional, 2010; Sousa, 2011, 2012a, 2013b) onde se observou que os alunos têm pior desempenho em questões que envolvem conexões matemáticas. Em ambos os problemas o aluno não conseguiu relacionar o tema das funções com a geometria, esta dificuldade pode, também, dever-se ao facto de o aluno afirmar que nunca relacionou estes dois temas, e portanto dois problemas envolvendo este tipo de raciocínio é algo novo para o aluno (Gabinte de Avaliação Educacional, 2010; Sousa, 2011, 2012a, 2013b) o que está de acordo como o facto de o aluno afirmar que não estava habituado a relacionar diferentes temas na matemática.

No problema 2, o aluno percebeu rapidamente que tem de utilizar as derivadas, porém, como no problema 1, teve muitas dificuldades em relacionar uma figura geométrica com uma função e em relacionar a expressão algébrica dessa função com a figura geométrica. Esta dificuldade em relacionar diferentes conceitos de diversos temas está patente no relatório do exame nacional de 2012 (Sousa, 2013b).

O aluno teve, também, outro tipo de dificuldades na resolução dos dois problemas:

- Erros nas operações algébricas nos números reais;
- Dificuldade em obter um modelo matemático para a área de uma figura dinâmica e em relacionar duas variáveis;
- Relacionar diferentes representações das funções;
- Não compreender processos de demonstração.

Estas dificuldades estão patentes em vários estudos, tais como, nos relatórios nacionais entre 2009 e 2012 (Gabinte de Avaliação Educacional, 2010; Sousa, 2011, 2012a, 2013b), nos relatórios nacionais dos testes intermédios de 2009, 2011 e 2012(Gabinte de Avaliação Educacional, 2009; Sousa, 2012b, 2013a) e por Guerreiro (2009).

Nos dois problemas, o aluno comentou que sentiu dificuldades em elaborar um plano, ou seja, em saber o que fazer. Esta dificuldade é referida por Polya (1978), que afirma que esta fase, muitas vezes, é a mais complicada na resolução de problemas. Porém, no segundo problema, o aluno afirmou que se lembrou facilmente das derivadas pois fez mais exercícios deste tema, e portanto tem os conceitos mais consolidados o que vai de encontro com os resultados de Maria (2002) e Leuca (2010) que afirmam que uma das dificuldades sentidas pelos alunos é não terem os conceitos interiorizados.

## 4.2 Beatriz

### 4.2.1 Caracterização da aluna

A Beatriz tem 18 anos e pretende seguir ciências médicas ou engenharia biomédica. O encarregado de educação é a mãe, que terminou o ensino secundário. A Beatriz está a repetir o 12.º ano com o objetivo de melhorar a nota para se poder candidatar ao curso que pretende. No 2.º período teve 16 valores, sendo a mesma do que no 1.º período. As notas do 10.º e 11.º ano assim como as notas do primeiro 12.º ano frequentado no ano letivo 2012/2013 estão na tabela 4.2.

| Período | 1.º | 2.º | 3.º |
|---|---|---|---|
| 10.º | 13 | 13 | 13 |
| 11.º | 15 | 14 | 15 |
| 12.º | 14 | 15 | 14 |

Tabela 4.2: Notas 10.º, 11.º e 12.º ano

Como se observa na tabela 4.2, a Beatriz teve uma ligeira melhoria em relação ao seu desempenho do 10.º para o 11.º ano, porém nota-se que é uma aluna bastante regular, tal como aconteceu no presente ano letivo. É a terceira melhor aluna da turma, o que se pode dever ao facto de estar a melhorar a nota a esta disciplina. É uma aluna responsável, que realiza todas as tarefas propostas, contudo é pouco participativa o que dificultou a análise da sua capacidade de resolução de problemas, sendo de referir ainda que nunca frequentou as aulas de apoio. A opinião da professora Rosário Lopes sobre a Beatriz é que esta é empenhada e revela uma boa intuição e compreensão matemática.

### 4.2.2 Problema 1

**Resolução de problemas**

A Beatriz demorou 32 minutos a resolver este problema. Inicialmente a Beatriz acrescentou, na figura da circunferência (figura que vinha junto do problema), os raios da circunferência que vão do centro O para o ponto A e para o ponto oposto ao ponto A, afirmando que estes mediam 5.

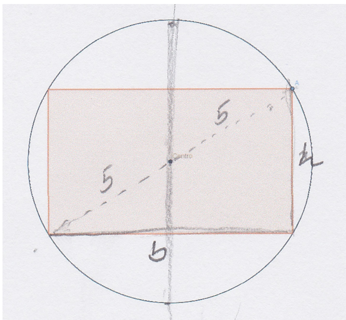



Figura 4.18: Primeiros passos na resolução do problema

Numa folha à parte, a aluna escreveu a fórmula do que queria maximizar, isto é, da área do retângulo:

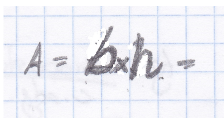



Figura 4.19: Área do retângulo

Ao terminar a leitura e compreensão do problema, a Beatriz foi desenvolvendo um plano de resolução do problema e executando-o, em simultâneo. Quando acabou de escrever a área do retângulo, concluiu:

> Para que isto seja o maior possível, certo? Se conseguisse arranjar aqui uma função era bom.

Quando questionada sobre a necessidade de uma função, a aluna respondeu que, com uma função podia obter os máximos e mínimos, acrescentando, de seguida, que:

> Mas não sei como arranjar uma função, não tenho nenhuma ideia ainda

Ao perceber que tinha de calcular a área máxima, a Beatriz concluiu que necessitava de calcular uma derivada, ou seja, conseguiu, numa fase inicial da elaboração e execução da resolução do problema, estabelecer a conexão matemática dentro de um mesmo tema. Apenas faltava perceber qual era essa função e, por isso, neste ponto foi auxiliada.

Esta aluna, possivelmente devido ao facto de estar a fazer melhoria no 12.º ano, pode ter o conceito das derivadas e a respectiva aplicação no cálculo de máximos e mínimos mais consolidado, pois conseguiu aperceber-se facilmente da relação entre a derivada e o cálculo de um máximo, só lhe faltando relacionar a área do quadrilátero com uma função.

**Conexões dentro da matemática**

A Beatriz relacionou, após uma leitura e compreensão do problema, a derivada com o cálculo da área máxima. Porém, teve dificuldades em relacionar a área do quadrilátero com uma função, ou seja, não conseguiu perceber qual era a função a utilizar, como se comprova com a seguinte afirmação:

> Mas não sei como arranjar uma função, não tenho nenhuma ideia ainda

Depois desta afirmação da Beatriz, houve uma tentativa para que desenvolvesse esta ideia. Após ter sido questionada sobre a definição de função, a aluna respondeu que "é uma relação entre o $y$ e um $x$", no entanto, não sabia o que significava o $y$ no problema em questão, pelo que se estabeleceu o seguinte diálogo:

> Investigador: - Há bocadinho disseste-me que querias uma função, que função era essa?
>
> Beatriz: - É isso que eu não sei, ...
>
> I: - Então e o que queres maximizar?
>
> B: -A área. Humm

Só neste momento é que a Beatriz conseguiu perceber a relação entre a área do quadrilátero e uma função.

A relação entre o máximo e a área máxima foi natural para a Beatriz, como se pode observar na figura 4.20 e tendo em conta a seguinte afirmação "agora temos o h máximo. Mas só temos a área máxima e não queremos a área máxima".

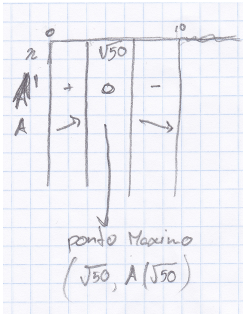



Figura 4.20: Quadro de sinais da função derivada

Na figura 4.20 observa-se que a aluna teve sempre presente que quer obter as dimensões do retângulo para que a área seja máxima, pois utiliza para a função área, a notação A de área e o domínio que utiliza no quadro de sinais varia entre 0 e 10, isto é, um domínio que está de acordo com o contexto do problema.

Resumidamente, a aluna conseguiu relacionar a área máxima com o cálculo de uma derivada, e o máximo obtido com a derivada e a área máxima, contudo não relacionou a área do quadrilátero com uma função.

### Dificuldade na resolução do problema

Em termos de procedimentos, a Beatriz cometeu dois erros que foram resolvidos devido à intervenção do investigador. Os erros em questão foram:

- Na relação entre a base (b) e a altura (h) no teorema de Pitágoras, a aluna enganou-se nos sinais (evidenciado a vermelho)

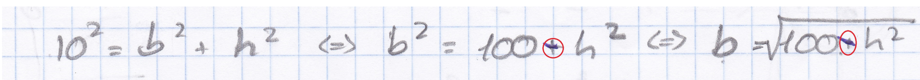


Figura 4.21: Erro de sinais entre o teorema de Pitágoras

- No cálculo da derivada $(100 - h^2)'$, como se pode observar na figura seguinte (evidenciado a vermelho) o valor dessa derivada tem um tipo de letra diferente do resto da expressão pois foi escrito após reparo do investigador

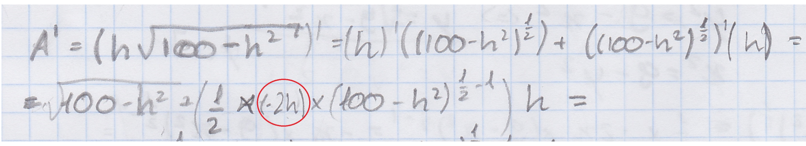


Figura 4.22: Cálculo de $(100 - h^2)'$

O primeiro erro deveu-se sobretudo à falta de atenção, mas também é inerente a uma dificuldade apresentada por vários alunos em cálculos algébricos, sendo que, esta dificuldade, também, está patente no segundo erro.

### 4.2.3 Problema 2

#### Resolução do problema

A Beatriz ao ler o problema começou por interpretá-lo, desenhando numa folha de papel as informações do enunciado, isto é, uma circunferência de raio 3, um ponto P pertencente à circunferência, uma reta $OP$ e a reta tangente à circunferência no ponto P, como se observa na seguinte figura:

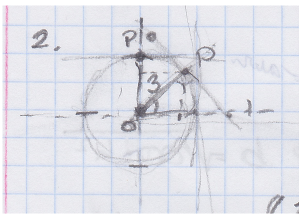


Figura 4.23: Primeiros passos da resolução do problema 2

Depois de compreender o problema, a Beatriz começou por elaborar uma estratégia de resolução, contudo essa primeira estratégia não lhe permitiria resolver o problema em questão, o que a Beatriz percebeu rapidamente. De seguida, ao ser questionada se se lembrava de algum problema que envolvesse o conceito de reta tangente, a Beatriz lembrou-se em primeiro da tangente trigonométrica, e mais tarde é que afirmou que "são as derivadas". Ao ser pedido que explicasse a razão de ter dito derivadas, ela comenta "são as retas tangentes ... são os declives", contudo a aluna questionou-se "como é que fazer a derivada vai-me ajudar a saber se é perpendicular". Desta forma, a Beatriz compreendeu a relação entre a derivada e o declive da reta tangente, mas não compreendeu como é isso a poderia ajudar.

Resumidamente a aluna conseguiu, após alguma insistência, compreender a relação entre a derivada e a reta tangente, pensando em questões semelhantes..

Mais tarde, descobriu uma estratégia que lhe permitiria demonstrar o que se queria, porém deparou-se com outra questão "É derivada de função de quê?", a Beatriz percebeu que necessitava de uma função, pois precisava de derivar, contudo, não conseguiu relacionar a figura geométrica com uma função.

### Conexões matemáticas dentro da matemática

A Beatriz demorou algum tempo, e só com alguma insistência, foi capaz de relacionar as derivadas com a reta tangente. Após perceber esta relação, não entendeu como é que a podia utilizar na resolução do problema, afirmando mesmo que "como é que fazer a derivada vai-me ajudar a saber se é perpendicular".

Referindo à Beatriz que podia saber o declive da reta tangente, a aluna afirmou de seguida que o declive da reta OP vai ter declive "oposto", tendo então percebido uma estratégia para resolver o problema. Contudo, deparou-se com outro problema que era saber qual função utilizar.

Para responder a esta questão, a Beatriz começou por considerar um referencial ortonormado, como mostrado na figura 4.23. De seguida, ao ser questionada sobre as coordenadas do ponto P, a aluna escreveu:

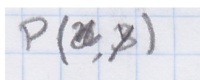



Figura 4.24: Coordenadas do ponto P

Foi-lhe perguntado se existe alguma relação entre $x$ e $y$, e após algumas perguntas e tentativas, a aluna referiu a equação da circunferência:

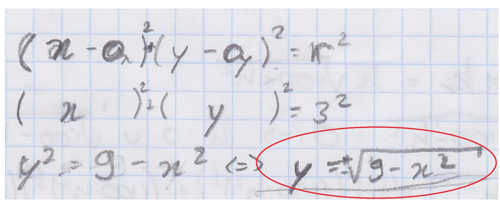



Figura 4.25: Equação da circunferência

A Beatriz ao escrever $y^2 = 9 - x^2$ afirmou que "já tem uma espécie de função", simplificando, de seguida, como mostrado na figura 4.25.

Posteriormente, ao ser questionada que função queria derivar, a aluna respondeu "A derivada desta", apontando para a expressão assinalada a vermelho na figura 4.25. Compreendendo, então, a relação entre a função a derivar e a circunferência.

### Dificuldades na resolução do problema

A Beatriz na resolução do problema, demonstrou dificuldades na fase das conexões matemáticas, como foi analisado anteriormente, nomeadamente em relacionar uma função com a circunferência.

A Beatriz teve, também, outras dificuldades:

- Na simplificação da expressão:

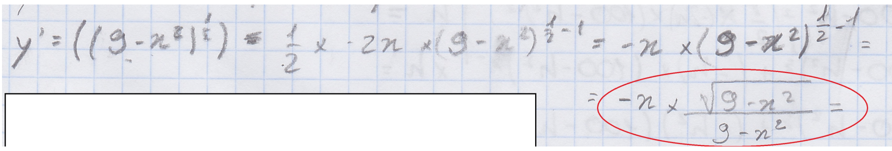


Figura 4.26: Expressão da derivada

A aluna terminou assim a simplificação (ver figura 4.26) e, só com auxílio, foi capaz de obter a seguinte simplificação:

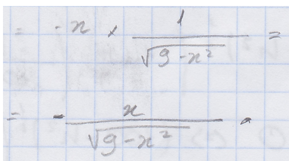


Figura 4.27: Simplificação da expressão da derivada

- Em atribuir coordenadas do ponto P, pois ao descobrir a relação entre o $x$ e o $y$ (ver figura 4.25 evidenciado a vermelho), não foi capaz de as relacionar com as coordenadas do ponto P, como se mostra no seguinte diálogo:

  Beatriz: -O ponto P anda à volta da circunferência, não tem coordenadas fixas.

> Investigador: -Pois não, mas dado um $x$ o que é que tem de ser o $y$?
>
> B: -Sim, mas eu posso dar um ... entre 3 e -3 posso dar um $y$ qualquer e assim como $x$.

Neste diálogo, observam-se dificuldades em relacionar as coordenadas do ponto P, tendo em conta onde está situado.

Contudo, é de salientar que a Beatriz não sentiu dificuldades por ser um problema de demonstração.

### 4.2.4 Opinião da aluna

#### Problema 1

A Beatriz refere que o primeiro problema não era dos mais fáceis, mas não o achou assim tão difícil reforçando essa ideia afirmando que "basta ir de passo em passo".

Ao ser questionada sobre as dificuldades que sentiu, a aluna refere-se ao cálculo e não à maneira de como chegar à solução, o que está de acordo com o que fez, pois desde o início definiu uma estratégia adequada para a resolução do problema:

> Para que isto seja o maior possível, certo? Se conseguisse arranjar aqui uma função era bom. (...) Mas não sei como arranjar uma função, não tenho nenhuma ideia ainda

Esta afirmação está de acordo com o que respondeu ao ser inquirida acerca da passagem de um problema geométrico para um problema de cálculo de derivadas, pois afirmou que "não é por estar uma figura geométrica que eu penso que só tenho de utilizar geometria".

#### Problema 2

A Beatriz considerou este problema difícil, principalmente na compreensão do que tinha de fazer. Outra das dificuldades referidas pela aluna, foi não ter percebido que tinha de recorrer à derivada, afirmando que esta dificuldade se deveu "por não ter nada fixo".

A aluna referiu, ainda, que sozinha não conseguiria pensar na derivada, tendo inicialmente pensando no produto interno.

**Opinião geral**

A Beatriz refere que não está habituada a realizar conexões matemáticas, afirmando que:

> Nas aulas não tanto, porque nas aulas dá-se uma matéria de cada vez, apesar de sempre ir-se buscar matéria aos outros, o interesse é mais explicar a matéria nova.

Afirma também que problemas envolvendo conexões matemáticas não são difíceis dependendo do problema, podendo mesmo ajudar pois, nas palavras da Beatriz:

> Acho que até ajudam, porque se tiveres bloqueado com alguma coisa, procurar ir por outro sítio podes dar a volta

Ao ser questionada se as conexões matemáticas são importantes na educação da matemática, afirmou que:

> Ajudava não seguir uma linha reta, e quando se vê um problema ter assim uma visão mais abrangente e ter a matéria toda da matemática mais presente

A aluna acha que a matemática são "números, incógnitas e cálculos", referindo que a matemática é um todo, "Não, eu acho que a matemática é um todo, simplesmente há diferentes formas de ver e as diferentes formas de ver são as diferentes matérias diferentes". Esta aluna, mesmo não definindo corretamente matemática, sabe que na matemática está tudo interligado e que tudo se relaciona.

### 4.2.5 Síntese

A Beatriz realizou os dois problemas passando por duas fases: a compreensão do problema e elaboração e execução do plano. Boavida et al. (2008) referem que na resolução de um problema, os alunos passam por três fases, sendo duas delas as que a Beatriz passou e a terceira a fase da restropeção do problema. Polya (1978) afirma, também, que muitos alunos e professores não fazem esta terceira e última fase, que é a retrospeção do problema, o que está de acordo com a resolução da Beatriz.

As conexões matemáticas apareceram, em ambas as resoluções, na segunda fase (elaboração e execução do plano), porém no primeiro problema, a Beatriz percebeu, rapidamente, que precisava de calcular um máximo através do cálculo da derivada, porém não sabia o que derivar. Esta facilidade pode ter-se devido ao facto de a aluna estar a melhorar a nota e, por isso, ter os conceitos mais interiorizados, pois segundo Maria (2002) e Leuca (2010) uma das dificuldades dos alunos em fazer conexões é a falta de interiorização de conceitos anteriormente dados. Este facto também a pode ter ajudado a relacionar facilmente duas variáveis.

No segundo problema, a aluna para relacionar o conceito de derivada com o declive da reta tangente, pensou em problemas semelhantes, sendo esta, uma das estratégias propostas por Polya (1978) para a elaboração de um plano na resolução de problemas. Porém não descobriu uma estratégia para resolver este problema. A sua principal dificuldade foi compreender o que queria derivar, ou seja, não relacionou a figura geométrica com uma função, o que é corroborado pelas dificuldades que os alunos apresentam entre conexões de diversos temas no relatório do Exame Nacional de 2012 (Sousa, 2013b). Contudo, esta dificuldade não está só patente na resolução do problema 2, mas também no problema 1, pois a Beatriz teve dificuldades em relacionar a área do retângulo com uma função.

A aluna apresentou algumas dificuldades na resolução de ambos os problemas, em cálculos algébricos e na simplificação de expressões numéricas. Estas dificuldades são referidas nos relatórios dos Exames Nacionais entre 2009 e 2012 (Gabinte de Avaliação Educacional, 2010; Sousa, 2011, 2012a, 2013b).

Na opinião da Beatriz o primeiro problema era acessível, bastando ir resolvendo passo-a-passo. Contudo, no segundo problema sentiu dificuldades, nomeadamente, para compreender o que precisava de fazer, isto é, para elaborar um plano. Para Polya (1978) esta fase é a mais complicada, o que vai de encontro com as dificuldades sentidas pela aluna.

Por último, a aluna considerou que este tipo de raciocínios (conexões matemáticas) são importantes para a Educação Matemática, pois permitem manter a matéria presente, o que está de acordo com Silva et al. (2001).

## 4.3 Manuel

### 4.3.1 Caracterização do aluno

O Manuel tem 18 anos, está indeciso entre seguir uma carreira na área do desporto, da gestão de empresas ou da engenharia informática, mas tem uma maior preferência por engenharia informática. A mãe é a Encarregada de Educação, não se sabendo as suas habilitações literárias. Este aluno no 1.º período teve 14 valores e no 2.º período teve 15 valores. A nota final no 10.º ano foi de 11, no 11.º ano de 12 e no 12.º ano teve 13 valores, e no exame nacional teve negativa em ambas as fases, por isso, está a repetir a disciplina.

Contudo, apesar do aluno estar a repetir o 12.º ano por falta de aproveitamento, este tem demonstrado alguma facilidade na compreensão dos conceitos matemáticos. Este aluno tem revelado uma boa intuição matemática e compreensão de alguns problemas com maior grau de dificuldade. Referiu na entrevista, que as notas finais nos três anos anteriores deveram-se a alguns problemas pessoais, que podem ter sido resolvidos com a mudança de escola e de turma.

Desde o início do ano letivo, este aluno tem tido uma participação ativa nas aulas, fazendo algumas intervenções pertinentes, contudo nunca participou nas aulas de apoio.

### 4.3.2 Problema 1

#### Resolução do problema

O Manuel demorou aproximadamente 35 minutos a resolver este problema. Começou por escrever a fórmula da área do retângulo (evidenciado a azul), da circunferência (evidenciado a vermelho) e o valor da área da circunferência (evidenciado a verde), como se mostra na figura:

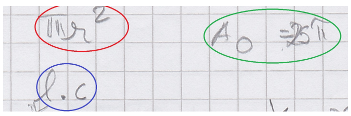



Figura 4.28: Início da resolução do problema

Após ter escrito estas informações iniciais, o Manuel afirmou "Eu já não me recordo como isto se faz". Ao questioná-lo acerca de ideias para resolver o problema, o aluno afirmou que já calculou a área da circunferência, mas que esta não deveria servir para muita coisa. De seguida, o aluno ainda notou que o comprimento e a largura do retângulo têm de ser menor do que dez.

Depois de compreender o problema, o Manuel tentou arranjar alguma relação na figura, não descobrindo nenhuma. Foi-lhe perguntado como é que podia obter as dimensões do retângulo para que a área seja máxima, ele começa por referir, passando a citar:

> Posso dar valores a este comprimento, valores que encaixem aqui (...) e depois ver se esses valores são os máximo ou vão ser outros

O Manuel ainda acrescentou que existe "uma fórmula para fazer isto".

Depois de pensar um pouco, referiu que este problema deve ser resolvido com programação linear. Ao ser questionado sobre o porquê dessa afirmação, o aluno respondeu que "estou a tentar recordar-me o que dei para trás", ou seja, tentou recordar-se de problemas que resolveu anteriormente para resolver a questão atual.

Até este momento, o aluno não se lembrou da derivada e só após ser questionado sobre o que lhe lembrava a área máxima é que respondeu "a derivada", lembrando-se de seguida que aprendeu derivadas no 11.º ano neste contexto, isto é, para descobrir áreas máximas, comentando de seguida que:

> Dei derivadas no 11.º ano e dei esta matéria, e relembrando que a derivada dá para calcular o máximo e o mínimo, dá para relacionar as duas coisas

O aluno tentou resolver o problema pensando em tarefas já realizadas anteriormente e tentando relacionar o tema da geometria com o das funções. A partir deste momento o Manuel tentou descobrir uma "fórmula que dê a área", sendo a "fórmula" uma expressão para a área do retângulo.

O aluno conseguiu, com algum auxílio, estabelecer uma relação entre as derivadas e o cálculo da área máxima.

### Conexões dentro da matemática

O Manuel depois de algumas questões e recordando-se de alguns exercícios executados anteriormente, conseguiu relacionar a área máxima com a derivada.

Ao pensar na derivada e na área máxima, o aluno tentou definir uma "fórmula" da área. Ao ser questionado sobre o significado de "fórmula" respondeu que:

> Ter uma expressão que me permitisse calcular a área

O aluno nunca falou especificamente de uma função, mas tendo em conta que anteriormente tinha escrito que:

$$y \cdot x = A_{\square}$$

Figura 4.29: Fórmula para a área do retângulo

Onde $x$ e $y$ representam as medidas do retângulo, foi questionado se a expressão da figura 4.29 não era uma fórmula, ao que o aluno respondeu que tem duas incógnitas e tem de haver uma maneira de relacionar as duas.

Mesmo não falando especificamente de uma função, o Manuel intuitivamente percebeu que precisava de arranjar um expressão que relacionasse a área com uma variável ou seja uma função. A grande dificuldade deste aluno foi descobrir essa expressão.

Mais tarde, o Manuel escreveu:

$$y = 10 \operatorname{sen} \alpha$$
$$x = 10 \cos \alpha$$
$$10 \operatorname{sen} \alpha \cdot 10 \cos \alpha = A_{max}$$

Figura 4.30: Expressão do x e do y e da área do retângulo

Descobriu uma expressão para a área considerando o ângulo seguinte (rodeado a vermelho):

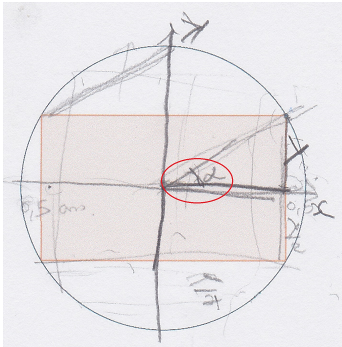


Figura 4.31: Ângulo considerado pelo aluno

Obteve, então, o valor desse ângulo para que a área fosse máxima, mas o objetivo era obter as dimensões desse retângulo. O Manuel sentiu dificuldades em obter estas dimensões, não sabendo o que fazer com este ângulo. Esta dificuldade pode dever-se, sobretudo, ao facto de ter utilizado o ângulo para calcular a área máxima.

### Dificuldades na resolução do problemas

Em termos de procedimentos o Manuel não cometeu erros, contudo sentiu dificuldades em obter um modelo matemático para a área do retângulo.

Este aluno, ao perceber que tinha de obter uma expressão para área do retângulo, concluiu que tinha de arranjar uma fórmula, para relacionar o comprimento e a largura. Ao recordar exercícios anteriores, afirmou que:

> Através do cálculo dos ângulos, por vezes podia-se chegar a esses valores. Estou a relembrar exercícios que fiz no passado e estou a ter noção que havia certos exercícios que se conseguia fazer através dos ângulos conseguia-se saber a área

Contudo, não desenvolveu esta ideia. Posteriormente, ao ser questionado novamente sobre o que queria fazer, o aluno respondeu que queria relacionar o $x$ e o $y$. Como consequência desta resposta foi questionado sobre propriedades do retângulo. O aluno considerou, então, o triângulo (a verde) na figura seguinte:

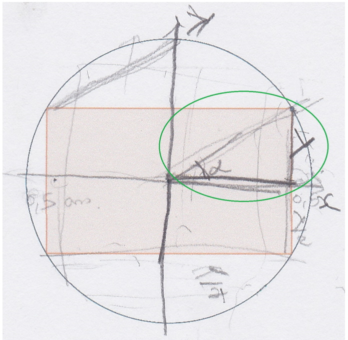


Figura 4.32: Triângulos considerados no retângulo

A partir desta figura e ao pensar sobre a circunferência, chegou à conclusão que:

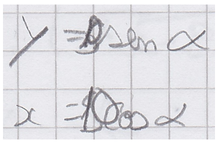



Figura 4.33: Valores de $x$ e de $y$ em função do ângulo $\alpha$

O Manuel obteve, assim, um modelo para a área do retângulo:

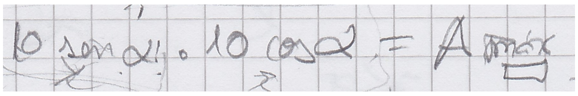



Figura 4.34: Modelo da área do retângulo

O Manuel, no final, não estabeleceu nenhuma relação entre o comprimento e a largura, desenvolvendo outro método para conseguir um modelo matemático para a área do retângulo, o que simplificou o estabelecimento do modelo.

### 4.3.3 Problema 2

#### Resolução do problema

O Manuel demorou sensivelmente 40 minutos para resolver este problema, começando por compreender o enunciado do problema. A primeira impressão é que o aluno interpretou facilmente os dados do enunciado, tendo desenhado uma circunferência, um ponto P e a reta tangente a esta, e escreveu que o raio da circunferência era 3, como se observa na seguinte figura:

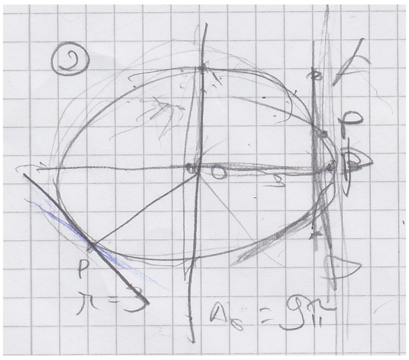



Figura 4.35: Interpretação do problema

Contudo, o aluno não interpretou corretamente o que era pedido, pois ao ser questionado sobre as principais dificuldades no problema, o aluno referiu "que pode ser um ponto qualquer" e, de seguida, afirmou "sei que o ponto P vai estar entre o 2.º e 3.º quadrante ou melhor no 1.º e 4.º", reforçando posteriormente que "aqui o valor da tangente neste ponto", apontando para um ponto da circunferência. O Manuel ao ler a palavra tangente confundiu-a com a função tangente da trigonometria. Assim, a parte inicial da elaboração e execução do plano foi confundida com a interpretação do que era pedido. O aluno demorou e teve dificuldades em criar estratégias adequadas para a elaboração do plano, pois não compreendeu todos os dados do enunciado.

Ao ser questionado sobre o que se lembrava acerca da reta tangente, o Manuel respondeu "$y = mx + b$". Ao insistir nesta questão, questionando-o sobre problemas envolvendo retas tangentes, o aluno respondeu imediatamente "derivadas". Neste momento, o Manuel conseguiu relacionar a reta tangente com derivadas, porém sentiu dificuldades em relacionar estes conceitos, o que se deveu a não ter compreendido corretamente o enunciado, confundindo a reta tangente com a função tangente.

### Conexões dentro da matemática

Como constatado anteriormente, o aluno não sentiu muitas dificuldades em relacionar a derivada com a reta tangente, ou seja, conseguiu com algum auxílio relacionar a derivada e a reta tangente, contudo, sentiu algumas dificuldades em descobrir o que iria derivar. Ao ser questionado sobre que queria derivar, o aluno afirmou "pois derivada do quê", ou seja, o aluno percebeu que precisava de derivar alguma coisa, mas não sabia o quê.

Após algum tempo, o aluno compreendeu que tinha de derivar uma função mas, ao ser questionado sobre o gráfico da função que queria derivar, o aluno não conseguiu responder, afirmando posteriormente que se tratava de uma "constante".

Só quando alertado de alguns pontos pertencentes ao gráfico da função, do domínio da função e marcados alguns pontos P que estavam sobre a circunferência, é que o Manuel compreendeu que o gráfico da função era uma circunferência. Este aluno percebeu que a circunferência não é uma função e, por isso, foi questionado sobre o que podia considerar, afirmando imediatamente que "a parte de cima, o 1.º e 2.º quadrante". De seguida, foi questionado sobre que gráfico da função que queria derivar e, após alguma hesitação, o Manuel conseguiu perceber que se tratava de uma semicircunferência, escrevendo, de seguida, a equação da semicircunferência, como mostra a figura:

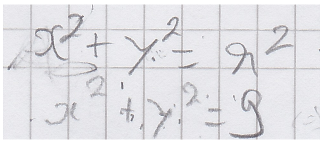



Figura 4.36: Equação da circunferência

O aluno obteve, assim, a relação entre o $x$ e o $y$, como mostra a seguinte figura:

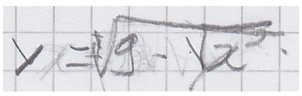



Figura 4.37: Relação entre o $x$ e o $y$

O Manuel só com algum auxílio foi capaz de relacionar a figura geométrica com uma função. Porém, adoptou uma estratégia diferente da Beatriz e do Tiago, pois ambos tinham começado por descobrir uma relação entre o $x$ e o $y$ e, posteriormente, a partir dessa relação definiram o gráfico da função, enquanto o Manuel começou por perceber qual era o gráfico da função e, a partir daí, relacionou o $x$ e o $y$.

### Dificuldades na resolução do problema

O Manuel sentiu muitas dificuldades em relacionar a figura geométrica de uma circunferência com uma função, só o conseguindo com algum auxílio, contudo o aluno revelou outras dificuldades.

Como referido atrás, o Manuel conseguiu observar que tinha de considerar a parte da circunferência que correspondia ao 1.º e 2.º quadrante, contudo ao ser questionado inicialmente que gráfico é que queria derivar, respondeu que era uma parábola, ou seja, confundiu o gráfico de uma circunferência com o de uma parábola.

Outra dificuldade que o aluno apresentou foi na interpretação do problema (como referido anteriormente), confundindo a tangente a uma circunferência com a função tangente. Esta confusão pode dever-se ao facto de, na altura da entrevista, estar a ser lecionado o tema das funções trigonométricas e, para além disso, o aluno podia não ter os conceitos bem interiorizados.

O Manuel após ter calculado a derivada, calculou os respectivos zeros, como mostra a figura:

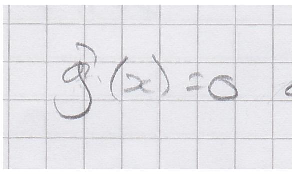



Figura 4.38: Igualar a derivada a zero

Quando questionado sobre o porquê de igualar a derivada a zero, o aluno respondeu que estava a perder tempo e que não servia para nada. O Manuel demonstra aqui um pouco de mecanização, pois muitas vezes a utilização das derivadas é para o cálculo de máximos ou mínimos, que consiste no que o aluno fez.

Por último, o aluno não se recordava da equação da circunferência, escrevendo mesmo que a equação seria $x + y = r^2$. De notar que tal como a Beatriz, o Manuel não sentiu dificuldades por se tratar de um problema de demonstração.

### 4.3.4 Opinião do aluno

**Problema 1**

O Manuel, ao ser questionado sobre a dificuldade deste problema, comentou que este tinha sido difícil, explicando, de seguida, que "porque em primeiro lugar nesta matéria não me sinto à vontade", isto é, uma das dificuldades sentidas pelo Manuel foi a não interiorização de conceitos.

O aluno referiu, também, que uma das principais dificuldades sentidas foi encontrar uma expressão, isto é, definir um modelo matemático para a área, o que está de acordo com a análise feita da resolução do aluno.

Parece que o aluno não pensou imediatamente na derivada, mas ele refere que, ao ler que era um máximo, lembrou-se da derivada mas como não tinha nenhuma "fórmula" não continuou com a ideia, ou seja, como o Tiago, o Manuel desistiu dessa ideia por não encontrar a relação entre a geometria e as funções.

**Problema 2**

O Manuel ao terminar a resolução do problema afirmou:

> Nunca faria isto (...) isto é de que isto é de génios

Ao ser questionado se o problema era difícil, afirmou que sim, pois não está habituado a fazer este tipo de problemas e que sozinho nunca o conseguiria fazer. Outra dificuldade que apresentou foi de nunca ter sido capaz de relacionar diferentes conceitos, dados em diferentes alturas da vida escolar, e que nunca tinha relacionado anteriormente.

Afirmou que pensou nas derivadas, "só que não está habituado a utilizar derivadas nestes contextos", afirmando que, por isso, começou a pensar noutras coisas, divagando. O facto de ser um problema novo, com uma utilização do conceito de derivada fora do normal, levou a que o aluno sentisse dificuldades na sua resolução.

**Opinião geral**

Para o Manuel a matemática é um "bicho de sete cabeças por vezes, não, eu sempre gostei de matemática", mais tarde ainda acrescentou que

> É uma ciência que ajuda, pode ajudar a resolver problemas do quotidiano (...) para quem gosta tem a sua piada e há formas de interpretar a matemática de forma a não ser tão "secante"

Este aluno definiu matemática tendo atenção às suas aplicações na vida real, não considerando a própria matemática. Ao ser questionado se na matemática existe relação entre os diferentes temas, responde "Existe, porque, olhe aqui está a prova", ao perguntar-lhe se antes observava essas relações afirma que "Já tinha uma certa noção que havia, mas para mim ir fazer estas relações sozinho não conseguiria, provavelmente". Conclui-se que o aluno não está habituado a fazer este tipo de raciocínios, o que pode ter sido uma das causas para as dificuldades sentidas durante a resolução dos problemas, pois se não está habituado a fazer questões envolvendo este tipo de raciocínios, são, portanto, questões novas para o aluno. Esta ideia é reforçada, na seguinte resposta do aluno, ao ser questionado se está habituado a fazer conexões matemáticas em sala de aula e no estudo:

> Não, quer dizer relacionar, pronto o que nós costumamos relacionar, matéria com matéria, até é uma coisa normal. Mas relacionar este tipo de conceitos desta forma não

O próprio aluno sente exatamente isso, pois quando questionado se achava complicado relacionar diferentes temas em matemática, responde que:

> Sim, quer dizer se eu tivesse um pouco mais de prática (...) provavelmente fizesse com outra à vontade

### 4.3.5 Síntese

O Manuel resolveu ambos os problemas passando por duas das três fases da resolução de problemas definidas por Boavida et al. (2008). Estas duas fases são: a compreensão do problema e a elaboração e execução do plano. A terceira fase é a retrospeção da resolução do problema, que o aluno desprezou, o que era previsível por Polya (1978).

O aluno, para elaborar um plano de resolução do problema 1, começou por pensar em problemas análogos, sendo esta uma estratégia para a elaboração de um plano defendida por Polya (1978). Este mesmo autor também afirma que a fase mais complicada da resolução de problemas é a fase da elaboração de um plano, o que é observável na resolução do problema 2, onde o aluno sentiu muitas dificuldades na elaboração de um plano.

No primeiro problema o aluno conseguiu relacionar a área do quadrilátero com uma função, porém ao obter a área máxima descobriu um ângulo $\alpha$. Com este ângulo, o aluno conseguiria obter as dimensões do quadrilátero para que a área fosse máxima, porém o aluno teve algumas dificuldades neste aspeto. Outra das dificuldades sentidas pelo Manuel, nesta resolução, foi não conseguir relacionar algebricamente o comprimento e a largura do quadrilátero, arranjando outra estratégia para o fazer. Esta dificuldade está patente nos relatórios dos testes intermédios de 2009, 2011 e 2012 (Gabinte de Avaliação Educacional, 2009; Sousa, 2012b, 2013a).

No segundo problema o aluno teve bastantes dificuldades em relacionar a circunferência com uma função e tentou calcular um máximo, o que não era necessário para a resolução do problema, demonstrando, por isso, alguma memorização e uma não interiorização de conceitos. Estas dificuldades estão patentes no relatório dos Exames Nacionais de 2012 (Sousa, 2013b) e em Boaler (2002).

O aluno afirmou que sentiu muitas dificuldades em resolver o primeiro problema, pois não interiorizou o tema da geometria, o que segundo Leuca (2010) e Maria (2002) implica que os alunos tenham dificuldades em fazer conexões matemáticas. Na resolução do problema 1, analisando a resolução do aluno, parece que não conseguiu relacionar, inicialmente, o conceito de derivadas com a área máxima, porém o aluno afirmou que, ao ler o problema, pensou logo em derivadas e não prosseguiu com essa ideia porque não observou nenhuma função, ou seja conseguiu relacionar facilmente a derivada com a área máxima mas desistiu dessa ideia, devido à dificuldade que apresenta em relacionar diferentes temas. Esta dificuldade está patente no relatório dos Exames Nacionais de 2012 (Sousa, 2013b).

Por fim, o aluno referiu que não está habituado a fazer este tipo de raciocínios, portanto estes problemas são novos, o que implica que o aluno sinta dificuldades nestas questões, o que está de acordo com os relatórios dos Exames Nacionais de 2009 a 2012 (Gabinte de Avaliação Educacional, 2010; Sousa, 2011, 2012a, 2013b).

## 4.4 Rui

### 4.4.1 Caracterização do aluno

O Rui tem 18 anos e não sabe o que fazer a seguir à conclusão do ensino secundário. O pai é o Encarregado de Educação e terminou o secundário e a mãe tem o ensino básico. Este aluno entre o 1.º e o 2.º período desceu a nota de matemática, no 1.º período teve 12 e no 2.º período teve 11 valores. As notas do 10.º e 11.º ano estão indicadas na tabela 4.3.

| Períodos | 1.º | 2.º | 3.º |
|---|---|---|---|
| 10.º | 12 | 12 | 12 |
| 11.º | 7 | 6 | 8 |

Tabela 4.3: Notas 10.º e 11.º ano

Ao analisar a tabela 4.3 observa-se que este aluno teve um percurso muito irregular na disciplina de Matemática, o que é bastante comum nos alunos da turma que acompanha desde o 10.º. No 10.º ano foi bastante regular, tendo tido, em todos os períodos, 12 valores, porém o comum nesta turma é apresentar uma grande irregularidade nas classificações nos diferentes períodos do ano letivo. No 11.º ano, no 1.º período, diminuiu 5 valores, tendo a classificação de 7 valores. Porém ao longo dos três períodos do 11º ano, foi melhorando a classificação, o que lhe permitiu passar de ano, com média do 10.º e 11.º ano de 10 valores, e inscrever-se na disciplina de Matemática A no 12.º ano.

Durante as aulas, o Rui aparenta ser um aluno atento e concentrado, participando por vezes na aula, porém, através das suas observações e dificuldades em relação a determinadas tarefas, observa-se que esta ideia é falsa. No entanto, tem um gosto elevado por desafios e problemas matemáticos, sendo por isso uma boa escolha para a presente investigação. No 1.º período o Rui nunca participou nas aulas de apoio, no 2.º período começou a participar mais, mas não de forma regular.

### 4.4.2 Problema 1

#### Resolução do problema

O Rui demorou aproximadamente 45 minutos a resolver este problema.

Começou por desenhar dois raios da circunferência (a vermelho), como mostra a seguinte figura:

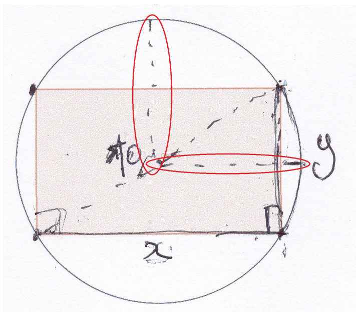



Figura 4.39: Primeiros passos da resolução do problema

De seguida, o aluno começou a pensar em estratégias que lhe permitiriam resolver o problema, afirmando, então, que:

> Isto é como o "coiso" da área sombreada, isto tem-se de calcular a área do círculo e depois tirar a área do ...

Com esta afirmação, é possível perceber que o Rui começou por recordar exercícios antigos e, assim, recordou-se do cálculo de áreas sombreadas, tentando, de seguida, calcular as dimensões do retângulo.

Ao ser questionado como pode obter a área máxima, o Rui respondeu "que é multiplicar esta medida por esta", referindo-se aos lados dos retângulos e apontando para estes. No entanto, quando se deparou com o facto de essa expressão permitir calcular a área do retângulo, mas não necessariamente a área máxima, o Rui respondeu "Acho que não estou a perceber a questão (...) supostamente o que estava a perceber é que tínhamos de calcular a área do retângulo", isto é, o aluno não compreendeu o problema, teve de voltar a ler para o compreender.

Neste momento, ao interpretar, novamente, o problema, o aluno começou por afirmar "temos de calcular primeiro a área do círculo", tendo, então escrito:

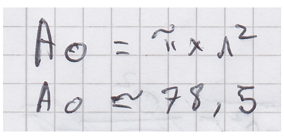



Figura 4.40: Área do círculo

De seguida, o aluno afirmou que se quer saber qual o máximo de área que o retângulo pode ter. Mesmo compreendendo o problema, o aluno não conseguiu relacionar o cálculo de máximos com as derivadas. Apenas, após várias tentativas, através de diversas questões, para que o aluno se relembrasse como fazer o cálculo dos máximos, é que o Rui se lembrou das funções, mas não das derivadas. No entanto, também, não conseguiu descobrir a função em causa.

O aluno não conseguiu nem relacionar o cálculo de máximos com a derivada, nem relacionar a área do quadrilátero com uma função.

### Conexões dentro da matemática

O Rui fez algumas tentativas para resolver o problema, contudo, não se lembrou de como se calculava a área máxima e, só após ter sido questionado sobre problemas de máximos e mínimos lecionados recentemente, é que o aluno se lembrou das funções e dos máximos e mínimos, afirmando que "isto tem a ver com uma função mas da trigonometria.", mas não sabia como se calculava. O facto de referir as funções trigonométricas deveu-se, sobretudo, ao facto de que, no momento da entrevista a matéria que estava a ser lecionada em sala de aula era a das funções trigonométricas.

Ao fim de algumas questões, nas quais lhe foi explicado o enunciado do problema, que o aluno, até ao momento, não tinha percebido totalmente, o Rui conclui que essa função:

> Vai representar a variação da área consoante a movimentação dos pontos

Novamente observa-se uma falta de compreensão do problema por parte do Rui, o que implicou não conseguir resolver o problema.

Apenas após a compreensão total do problema, é que o aluno foi capaz de compreender e relacionar a área do retângulo com uma função. De seguida, teve uma elevada dificuldade em descobrir um modelo matemático para a área do retângulo, o que será analisado de seguida.

Depois desta compreensão e de obter uma função para a área do retângulo, o Rui não soube como calcular um máximo. Para que o aluno tivesse a ideia de derivada, decorreu o seguinte diálogo:

> Investigador: - Cálculos de máximos do que é que te lembras?

Rui: - Nada.

I: - Nada. E quando é que falaste este ano de cálculo de máximos?

R: - Foi mesmo no início...

I: - Foi no início??

R: - Sei lá, não foi no início?!

I: - Deves ter falado na estatística, mais recentemente, falaste de máximos ou não?

R: - Para as sucessões, não (...) Foi quando tivemos a dar funções, mesmo?

I: - Quando tiveste a dar o quê mesmo das funções?

R:- Acho que era a monotonia das funções.

I: - E como é que estudavas a monotonia das funções? Com recurso a que?

R: - A monotonia é saber se ela é crescente ou decrescente, não era?

I: -Isso mesmo.

R: - Exato...

I: - Com recurso a...às derivadas.

Analisando este diálogo percebe-se que o Rui não conseguiu relacionar o cálculo de máximos com as derivadas. Esta dificuldade deve-se sobretudo à não interiorização do conceito de derivadas e suas aplicações.

O aluno não teve dificuldade em relacionar o máximo obtido com o cálculo da derivada e a área máxima, afirmando mesmo que "Agora temos de calcular este (referindo-se ao $y$) e temos de pegar na expressão anterior". A expressão anterior a que o Rui se referiu foi:

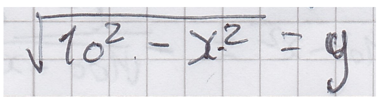



Figura 4.41: Relação entre $x$ e $y$

Resumidamente o aluno teve várias dificuldades em relacionar a derivada com o cálculo de máximos, pois não interiorizou o conceito de derivada.

### Dificuldades na resolução do problema

O Rui, para além das dificuldades analisadas anteriormente, teve outras dificuldades. Uma delas foi em descobrir um modelo para a área do retângulo, pois não conseguiu relacionar o $x$ e o $y$, o que só foi possível após ter sido questionado acerca das propriedades do retângulo e chamado à atenção para os dados da seguinte figura (a verde):

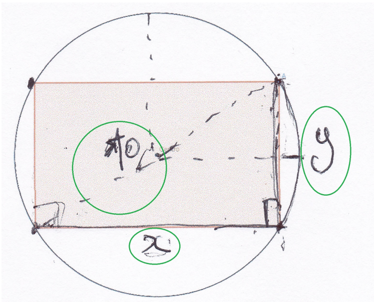



Figura 4.42: Dados que o Rui sabia sobre o retângulo

Só assim o aluno concluiu que precisava de recorrer ao teorema de Pitágoras, obtendo então uma relação entre $x$ e $y$, como mostra a figura:

$$10^2 = x^2 + y^2$$
$$10^2 - x^2 = y^2$$
$$\sqrt{10^2 - x^2} = y$$

Figura 4.43: Relação entre $x$ e $y$

### 4.4.3 Problema 2

### Resolução do problema

O Rui demorou sensivelmente 45 minutos a resolver o problema, começando por desenhar uma circunferência de centro O, o ponto P e escreveu que o raio da circunferência media 3. Para além disso, desenha um referencial cartesiano com a origem do referencial no centro da circunferência O, como mostra a figura:

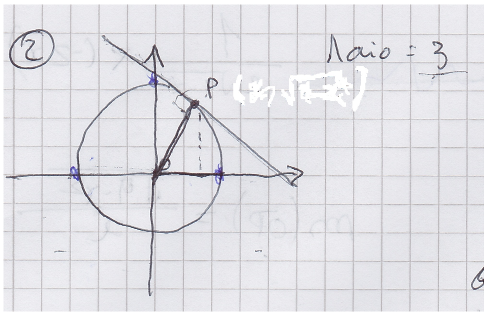



Figura 4.44: Primeiros passos na resolução do problema

O Rui teve muitas dificuldades em relacionar a reta tangente com a derivada. Ao ser questionado sobre o que se lembrava sobre a reta tangente, o aluno respondeu:

> Lembro-me de trigonometria...porque é normalmente onde está associado... ou à geometria também

O Rui relacionou a reta tangente à tangente de um ângulo, demonstrando que o aluno não tem o conceito de derivada nem o de tangente de um ângulo bem interiorizados, confundindo-os. Porém, esta dificuldade apresentada pelo Rui é diferente da apresentada pelo Manuel, pois o último pensava que a reta tangente a considerar seria a reta vertical tangente à circunferência no eixo horizontal positivo, como se observou anteriormente, enquanto o Rui relacionou a reta tangente com a tangente de um ângulo, ao ser questionado se ele estava a fazer essa relação afirmou que "era isso".

Ao insistir novamente se se lembrava de problemas com retas tangentes, o aluno afirmou que "que me esteja a lembrar assim não" e, ao ser questionado sobre a relação das derivadas e das retas tangentes, respondeu "que não estou a ver a relação". Novamente, observa-se que o aluno não interiorizou o conceito de derivada, o que o impediu de relacionar o conceito de derivada com a reta tangente.

### Conexões dentro da matemática

Como constatado anteriormente, o Rui teve muitas dificuldades em relacionar a reta tangente com a derivada, conseguindo fazer essa relação após muito auxílio.

O Rui, após perceber que precisava de recorrer à derivada, comentou "como é que vou calcular o declive da reta tangente se não tenho nenhuma medida", ou seja, não conseguiu relacionar a circunferência com uma função. Anteriormente, antes de relacionar as derivadas com a reta tangente, o Rui calculou a norma do vetor $\overrightarrow{OP}$ obtendo a seguinte expressão:

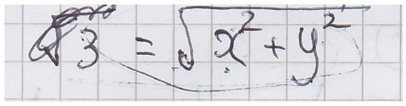



Figura 4.45: Norma do vetor $\overrightarrow{OP}$

O Rui ao ser alertado para essa relação, afirmou que:

> Tenho que fazer a derivada de uma função que está relacionada com o círculo

Com algum auxílio, o aluno conseguiu relacionar a função que queria derivar com a circunferência, notando que "pois foi no exercício anterior", ou seja lembrou-se do problema 1. Porém, mesmo compreendendo essa relação, não soube como fazer, pois nota que "agora onde vou buscar essa função".

Olhando para a relação obtida anteriormente (ver figura 4.45), o aluno conseguiu obter uma relação entre o $x$ e o $y$, como se vê na seguinte figura:

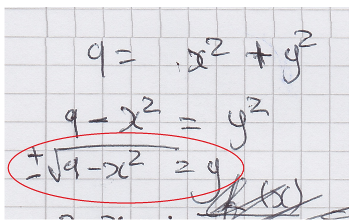



Figura 4.46: Relação entre o $x$ e o $y$

Ao ser questionado se era uma função a expressão (a vermelho) na figura 4.46, ele começa por dizer que sim era, mas não era injetiva, e após alguma hesitação, concluiu que não é uma função.

O aluno concluiu que tinha de considerar só a parte positiva ou negativa e considerou a parte positiva, como mostra a seguinte figura:

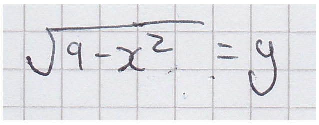



Figura 4.47: Função a derivar

O aluno, depois de questionado, afirmou que o gráfico da função da figura 4.47 dá a semicircunferência com ordenadas positivas.

Resumidamente, o aluno depois de alguma ajuda conseguiu relacionar uma função com a circunferência, porém sentiu algumas dificuldades nesta relação.

### Dificuldade na resolução do problema

Inicialmente, o aluno escreveu o seguinte:

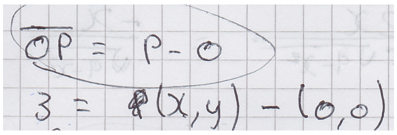



Figura 4.48: Cálculo da distância entre dois pontos

O aluno, para calcular a distância entre dois pontos, fez as coordenadas de um menos o outro, neste caso entre o ponto P, que pertence à circunferência, e o centro da circunferência, e como a circunferência tem raio 3, igualou a três. O aluno demonstrou na figura 4.48 que não sabe como se calcula a distância entre pontos, novamente demonstra que não tem interiorizado alguns conceitos.

O mesmo aconteceu quando foi questionado se a expressão da figura 4.46 era uma função. O aluno afirmou que se tratava de uma função, mas que não era injetiva "porque o $x$ tem duas imagens". Conclui-se que as principais dificuldades na resolução do problema, devem-se sobretudo à não interiorização de conceitos.

## 4.4.4 Opinião do aluno

### Problema 1

O aluno pensava que era capaz de resolver o primeiro problema, mas com o devido auxílio. Ao ser questionado acerca das fases mais difíceis, afirmou que "não foi no cálculo das derivadas (...) se tivesse estudado antes de vir para cá conseguia fazer sozinho" mas afirma que não era dos problemas mais fáceis.

O Rui acrescenta ainda que a fase mais difícil foi perceber que tinha de obter a área máxima através da função, salientando ainda que "não chegava lá". Esta dificuldade do aluno em descobrir que tinha de obter a área máxima de uma função, está patente nas dificuldades já analisadas anteriormente, que se devem a uma falta de compreensão plena do enunciado do problema e da interiorização de conceitos dados nomeadamente referentes às derivadas. No fim, ainda referiu que nunca conseguiria obter uma função sem auxílio.

**Problema 2**

O Rui achou o segundo problema difícil porque, na sua opinião, não tem bases suficientes para o resolver. Afirmou que

> Se eu tivesse conhecimento das bases como deve ser chegava lá mais depressa, muito mais depressa

Esta afirmação é coerente com as dificuldades analisadas anteriormente referentes à não interiorização de conceitos anteriormente dados.

Ao ser questionado sobre quando se apercebeu que teria de utilizar as derivadas, o aluno afirmou que não se apercebeu sozinho mas apenas quando lhe foi dito e que a parte mais difícil foi aperceber-se que tinha as derivadas envolvidas num problema geométrico.

**Opinião geral**

O Rui ao ser questionado sobre se existia relação entre os diferentes temas na matemática, afirmou imediatamente que "Há sempre, há sempre uma relação", ao ser inquirido se via essas mesmas relações respondeu:

> Às vezes, são relações que não se notam logo à primeira, à primeira leitura, depois uma pessoa com uma leitura mais atenta, ler duas, três vezes, já percebe que já dei isto mas noutro tema anterior. No fundo eles relacionam-se todos

O aluno diz que os vários temas da matemática relacionam-se todos. Porém, ao ser pedido que desse uma definição de matemática o aluno respondeu:

> Matemática, para mim, é uma disciplina que desenvolve o cálculo, e que, nos ajuda no futuro se um emprego o requerir, e às vezes não é preciso requerir às vezes é mesmo necessário (...) a matemática é necessário durante o dia-a-dia

Na definição do Rui observam-se dois factos. O primeiro, mesmo considerando que na matemática os temas estão todos relacionados, não o considera na sua definição de matemática, em segundo define matemática tendo em conta as suas inúmeras aplicações, não só no dia-a-dia mas também no emprego.

O Rui, ao ser questionado sobre se está habituado a relacionar diferentes temas e conteúdos em sala e no estudo, respondeu que:

> Eu gosto mais quando se dá bloco a bloco, mas tenho a noção que, por vezes, os temas (...) misturam-se, e tem-se de usar em simultâneo, portanto, pode-se dizer, sim, já fiz exercícios que tenho de utilizar conhecimentos até de anos anos e de temas diferentes.

Contudo, acha estas relações complicadas, afirmando que:

> Acho, acho porque (...) às vezes torna-se complicado identificar que há dois temas ao mesmo tempo, porque estamos tão à espera que seja apenas um tema, que é aquele que estamos a dar, atualmente, nas aulas, que por vezes não vemos que: - "Epá" se calhar isto era mais fácil se usasse o que aprendi no tema anterior

Porém, mesmo achando este tipo de raciocínio complicado, acha útil este tipo de relações na resolução de problemas, pois:

> Ajuda na resolução dos problemas, pois (...) se for pelo tema que estamos a dar atualmente podemos não chegar tão depressa, como se usarmos esse mesmo tema juntamente com outros

O Rui afirma, também, que este tipo de raciocínios era benéfico em sala de aula, mas que essa utilização deveria ser cuidada, pois poderia prejudicar os alunos, o que se comprova com a seguinte resposta do Rui:

> Era benéfico, mas teria de ser dado com o maior cuidado, (...) porque às vezes vamos fazer um problema simples e pensamos: - Ai tenho de misturar este tema com este e depois ainda tenho de pôr este

### 4.4.5 Síntese

O Rui resolveu os dois problemas passando por duas fases da resolução de problemas, sendo estas as fases da compreensão do problema e da elaboração e execução do plano. Estas fases da resolução de problemas são defendidas por Boavida et al. (2008), contudo estes autores consideram uma terceira fase que é a retrospeção do problema. Polya (1978) afirma que os alunos desprezam muitas vezes esta fase, o que aconteceu em ambas as resoluções do aluno.

Ao tentar resolver o primeiro problema, o Rui começou por pensar em exercícios análogos, sendo esta uma estratégia defendida por Polya (1978) para obter um plano de resolução, porém ao pensar nestas tarefas o aluno não conseguiu resolver o problema, pois não compreendeu o seu objetivo. Esta dificuldade é referida por Polya (1978), pois, segundo este autor, a não passagem ou a passagem incompleta por uma das fases da resolução de problema leva, em última instância, à não resolução do problema.

No primeiro problema o aluno não conseguiu relacionar a derivada com a área máxima e, no segundo, a derivada com a reta tangente. Esta dificuldade está patente em Leuca (2010) e Maria (2002), que indicam que a não interiorização de conceitos dificulta as conexões matemáticas e em Boaler (2002) que afirma que a memorização leva a uma não interiorização de conceitos. Por outro lado, nos dois problemas, o aluno não relacionou o tema das funções com o da geometria, sendo esta dificuldade prevista no relatório do Exame Nacional de 2012 (Sousa, 2013b).

Na resolução do primeiro problema, o aluno sentiu, também, outras dificuldades, nomeadamente em relacionar duas variáveis e obter um modelo matemático para a área de um retângulo. Estas dificuldades estão patentes nos relatórios dos testes intermédios de 2009, 2011 e 2012 (Gabinte de Avaliação Educacional, 2009; Sousa, 2012b, 2013a).

No segundo problema, o aluno não se lembrava como se calculava a distância entre dois pontos, ou seja, novamente não interiorizou um conceito, tendo-o apenas memorizado, o que está de acordo com Boaler (2002).

Na opinião do aluno, uma das dificuldades no primeiro problema, foi no cálculo da derivada, sendo esta dificuldade corroborada nos relatórios dos Exames Nacionais de 2010, 2011 e 2012 (Sousa, 2011, 2012a, 2013b), nos quais é referido que os alunos sentem dificuldades em cálculos algébricos complexos. O aluno afirmou, também, que o primeiro problema não era dos mais fáceis e que sozinho não conseguiria obter uma função. Em relação ao segundo problema, o aluno afirmou que a principal dificuldade foi a falta de bases, o que está de acordo com o que foi analisado.

Por fim, o Rui considera que as conexões matemáticas no ensino da Matemática são importantes no processo ensino-aprendizagem, contudo, afirma que se deve ter cuidado ao utilizar este tipo de raciocínios em sala de aula.

# 5 Conclusão

Com este estudo pretendeu-se perceber como é que os alunos elaboravam conexões matemáticas e, para tal, pretendeu-se responder a um conjunto de questões que permitissem obter informações sobre o tema genérico.

Com a análise dos resultados apresentados na secção anterior, pode-se concluir que:

- Os quatro alunos, em geral, resolvem os problemas passando por duas fases: a fase da compreensão do problema e a fase da elaboração e execução o plano. Os alunos, nos problemas propostos, nunca fizeram uma retrospeção da resolução.

- As conexões matemáticas aparecem sempre na fase da elaboração e execução do plano, contudo dependendo dos alunos, podem surgir numa fase inicial ou mais tardia. De salientar também que, geralmente, as conexões foram estabelecidas quando os alunos pensavam em problemas semelhantes resolvidos anteriormente.

- Alguns dos alunos conseguiram fazer a conexão dentro de um mesmo tema, neste caso, dentro das derivadas. Porém, a conexão entre vários temas foi sempre complicada para qualquer dos alunos.

- A principal razão para as dificuldades em estabelecer conexões matemáticas dentro de um mesmo tema deve-se à falta de interiorização de conceitos.

- Os quatro alunos sentiram dificuldades em estabelecer as conexões entre vários temas, no primeiro problema, devido à sua dificuldade em relacionar variáveis e em obter modelos matemáticos e, no segundo problema, a dificuldade principal prendeu-se sobretudo em saber o que queriam derivar.

- Os alunos referiram-se a várias dificuldades na resolução dos problemas, mas pode-se considerar que todas estão relacionadas com a falta de conhecimentos consolidados ou ao facto de serem problemas "novos".

A maioria dos resultados obtidos está de acordo com a revisão de literatura. Analisando, no global, os quatro alunos observa-se que o seu conhecimento não está relacionado com a capacidade de fazerem conexões, o que está de acordo com Boaler (2002). No entanto, a consolidação de conhecimentos anteriores facilita a elaboração e resolução de conexões.

O objetivo geral do presente trabalho consistiu em compreender como é que os alunos fazem conexões matemáticas dentro da própria matemática, analisando, para tal, as várias dificuldades e que tipos de conexões dentro da matemática é que os alunos fazem. Concluiu-se que os alunos são capazes de estabelecer conexões dentro de um mesmo tema, se tiverem interiorizados os conceitos necessários. Porém, os alunos não estão habituados a relacionar ideias matemáticas de diversos temas, podendo ser apontadas várias causas para as dificuldades sentidas, no entanto, é importante salientar duas causas principais: os alunos não terem interiorizado conceitos necessários para essas conexões e, por outro lado, este tipo de tarefas ser "estranha" para eles.

Os alunos não sabem definir o que é a Matemática, dando inúmeras definições incompletas para esta ciência, ou seja, os alunos não compreendem as inúmeras relações e conexões que a matemática tem, mesmo afirmando que a Matemática é um todo. Em muitas das resoluções dos problemas, a principal dificuldade observada foi a conexão entre diversos temas e quando os alunos se apercebem que têm de utilizar uma função, ficam espantados, pois como se trata de uma figura geométrica, não conseguem, à partida, estabelecer a relação com uma função, ou seja, os alunos, mesmo afirmando que a matemática é um todo, em que tudo está relacionado, não pensam assim. Para os alunos serem capazes de estabelecer este tipo de conexões mais complexas tem de se modificar a sua maneira de pensar.

Por último, alguns dos alunos consideram benéfico e útil que se façam conexões matemáticas, pois permitem recordar e consolidar matéria dada anteriormente, porém, como um aluno salientou, deve-se ter cuidado com o objetivo do problema envolvendo conexões.

### Problemas e questões a desenvolver

Com este estudo obtiveram-se conclusões interessantes, permitindo uma melhor compreensão de como os alunos elaboram conexões matemáticas. Porém, existiram algumas limitações e problemas neste estudo. Em primeiro, inicialmente os alunos deveriam resolver três problemas, porém devido à falta de tempo, cada aluno resolveu apenas os dois primeiros problemas. A maioria das entrevistas foram desenvolvidas fora do tempo de aula e com um tempo limitado entre uma hora a uma hora e meia, o que impediu que os alunos pensassem e refletissem durante mais tempo sobre os problemas. Por último, nenhum dos alunos se sentiu confortável com o tema da geometria, o que pode ter levado à dificuldade de estabelecerem as conexões entre este tema e o das derivadas.

Em futuros estudos será pertinente explorar e analisar os diferentes tipos de conexões que existem dentro da matemática. É também relevante tentar perceber se um trabalho continuado com problemas de conexões matemáticas permitiria aos alunos melhorar as suas capacidades.

Como a Beatriz referiu, as conexões matemáticas permitiriam consolidar e interiorizar ideias matemáticas, porém seria interessante perceber se isto se observaria numa situação prática.

# Referências

Baratta-Loroton, B. (2003). *Patterns & connections in mathematics(manuscript).* Center for Innovation in Education. Retrieved 07/04/2014, from http://www.center.edu/Patterns_Connections.shtml

Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Classroom organisation and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309–365). Dordrecht: D. Reidel.

Boaler, J. (2002). Exploring the nature of mathematical activity: Using theory, research andworking hypotheses' to broaden conceptions of mathematics knowing. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1-2), 3–21.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). A experiência matemática no ensino básico: Programa de formação contínua em matemática para professores dos 1. º e 2. º ciclos do ensino básico. *Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular*. Retrieved 08/04/2014, from http://comum.rcaap.pt/handle/123456789/5566

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introduçao à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Carreira, S. (2010). Conexões no ensino da matemática: não basta vê-las, é preciso fazê-las. *Educação e Matemática*, *110*, 1.

Cebola, G. (2010). Conexões matemáticas. *Educação e Matemática*, *110*, 79–84.

Costa, A. (2010). Conexões: Matemática e Física um caminho sempre a par. *Educação e Matemática*, *110*, 85–90.

Coutinho, C. P., & Chaves, J. H. (2002). O estudo de caso na investigação em tecnologia educativa em portugal. *Revista Portuguesa de Educação*, *15*(1), 221–243. Retrieved 18/02/2014, from http/://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/492

Devlin, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões.* Porto: Porto Editora.

*Dicionário da língua portuguesa tomo i.* (n.d.). Texto editores.

Edwards, C., Penney, D., & Velasco, Ó. (1996). *Calculo con geometría analítica 4ed.* Naucalpan de Juárez: Prentice Hall Hispoamericano.

Ewell, P. T. (1997). Organizing for learning: A new imperative. *AAHE bulletin*, *50*, 3–6. Retrieved 07/04/2014, from http://www.aahea.org/

aahea/index.php/bulletin

Ferreira, C. D. (2012). *Conexões matemáticas em álgebra: um estudo com alunos do 7. º ano de escolaridade.* Retrieved 30/03/2014, from http://hdl.handle.net/10451/7694

Ferri, R. B. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de matemática. *Educação e Matemática*, *110*, 19–25.

Gabinte de Avaliação Educacional. (2009). *Projeto testes intermédios relatório final 2008-2009.* GAVE. Retrieved 10/05/2014, from http://www.gave.min-edu.pt/np3/24.html

Gabinte de Avaliação Educacional. (2010). *Relatório um olhar sobre os resultados dos exames nacionais.* GAVE. Retrieved 19/04/2014, from http://www.gave.min-edu.pt/np3/24.html

Guerreiro, L. (2009). *O papel das representações algébricas na aprendizagem das funções.* Retrieved 14/05/2014, from http://hdl.handle.net/10451/4096

Leuca, T. (2010). *Conexões no ensino e aprendizagem das sucessões.* Retrieved 06/04/2014, from http://hdl.handle.net/10451/3926

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in china and the united states.* Nova Iorque: Routledge.

Maria, E. (2002). *Conexões matemáticas num contexto de actividades de aplicação, investigação e modelação matemática: um estudo no 2º ciclo do ensino básico.* Retrieved 16/04/2014, from http://hdl.handle.net/10362/286

Matos, J. F., Carreira, S., Santos, M., & Amorim, I. (1995). *Modelação matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Mwakapenda, W. (2008). Understanding connections in the school mathematics curriculum. *South African Journal of Education*, *28*(2), 189–202. Retrieved 06/04/2014, from http://www.sajournalofeducation.co.za/index.php/saje/article/viewArticle/170

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning? Retrieved 08/04/2014, from http://www.nctm.org/news/content.aspx?id=25713

Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência. Retrieved 19/04/2014, from http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/bibliografia.htm

Ponte, J. (2003). Investigar, ensinar e aprender. In *Actas do profmat* (pp. 25–39). Lisboa: APM. Retrieved 18/12/2013, from http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf

Ponte, J. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105–132. Retrieved 17/02/2014, from http://repositorio.ul.pt/handle/10451/3007

Ponte, J. d. (2010). Conexões no programa de matemática do ensino básico. *Educação e Matemática*, *110*, 3–6.

Ponte, J., Serrazina, M., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. & Oliveira, P. (2007). Programa de matemática do ensino básico. *Lisboa: Ministério da Educação (DGIDC).*

Sawyer, W. (2012). *Prelude to mathematics.* Middlesex: Dover Publications.

Silva, J. (2010). Conexões matemáticas no ensino secundário. *Educação e Matemática*, *110*, 7–12.

Silva, J., Fonseca, M., Fonseca, C., Lopes, I., & Martins, A. (2001). Programa do 10º ano-matemática A. *Lisboa: Departamento do ensino secundário, Ministério da educação.*

Sousa, H. (2011). *Exames nacionais relatório 2010.* GAVE. Retrieved 19/04/2014, from http://www.gave.min-edu.pt/np3/24.html

Sousa, H. (2012a). *Exames nacionais relatório 2011.* GAVE. Retrieved 19/04/2014, from http://www.gave.min-edu.pt/np3/24.html

Sousa, H. (2012b). *Projeto testes intermédios relatório 2011.* GAVE. Retrieved 10/05/2014, from http://www.gave.min-edu.pt/np3/24.html

Sousa, H. (2013a). *Projeto testes intermédios relatório 2012.* GAVE. Retrieved 10/05/2014, from http://www.gave.min-edu.pt/np3/24.html

Sousa, H. (2013b). *Relatório provas finais de ciclo e exames finais nacionais 2012.* GAVE. Retrieved 19/04/2014, from http://www.gave.min-edu.pt/np3/24.html

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, *240*(29), 611–616. Retrieved from http://www.stolaf.edu/people/steen/Papers/sci_patterns.pdf

Vale, I., & Pimentel, T. (2010). Padrões e conexões matemáticas no ensino básico. *Educação e Matemática*, *110*, 33–38.

Wu, H. (2011). The mathematics k-12 teachers need to know. Retrieved

from http://math.berkeley.edu/~wu/Schoolmathematics1.pdf

# 6 Anexo 1

**Guião das entrevistas**

No fim da resolução de cada problema fazer as seguintes questões:

1. Achaste difícil o problema apresentado?

    (a) Que dificuldades é que tiveste durante a resolução do problema?

    (b) Quando é que te apercebeste que tinhas de utilizar o conceito de derivada?

    (c) Como correu a passagem de um problema geométrico para o cálculo da derivada? E o contrário?

No fim da resolução dos problemas.

1. Estás habituado/a a relacionar conceitos de diferentes temas no estudo e em sala de aula?

2. Achas que é complicado fazer estas relações? Porquê?

3. Achas que seria útil este tipo de raciocínio, ou seja, achas importante relacionar diferentes temas em matemática? E que benefícios traria este tipo de raciocínio para a aprendizagem da matemática?

4. O que é para ti a Matemática? Se precisasses de definir Matemática como a definirias?

5. Achas que existe alguma relação entre os diferentes temas da matemática? Por exemplo existe alguma relação entre a geometria e as probabilidades?

## 7 Anexo 2

**Agrupamento Escolas António Gedeão**

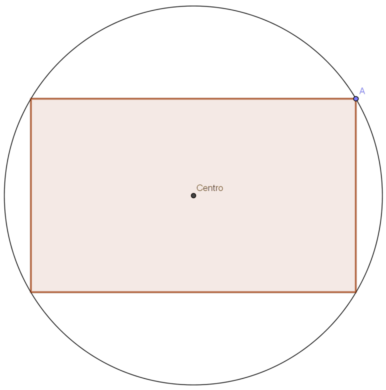
**Escola Secundária c/ 3º ciclo do EB António Gedeão**

Trabalho de Investigação

Nome: nº

**12º Ano de Escolaridade**

1. Um retângulo encontra-se inscrito numa circunferência de raio 5, como mostra a figura. Diga quais são as dimensões do retângulo para que a área desse retângulo seja máxima.




2. Considere uma circunferência de raio 3 e centro O, e um ponto P sobre essa circunferência. Prove que a reta tangente à circunferência no ponto P é perpendicular à reta OP.

3. Considere dois planos quaisquer e uma esfera de raio 1, considere que os dois planos são tangentes à esfera, indique uma possível equação para os dois planos, sabendo que fazem um ângulo de 45º entre eles.